

西安交通大学

硕士学位论文

非线性动力系统及复杂网络同步与辨识方法研究

申请人：孙志勇

学科专业：控制理论与控制工程

指导教师：司刚全

2012年06月

**Research on the Synchronization and Identification of Nonlinear
Dynamical Systems and Complex Networks**

A thesis submitted to
Xi'an Jiaotong University
In partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Engineering Science

By
Zhiyong Sun
(Control Theory and Control Engineering)
Supervisor: Dr. Gangquan Si
June 2012

论文题目：非线性动力系统及复杂网络同步与辨识方法研究
学科专业：控制理论与控制工程
申请人：孙志勇
指导教师：司刚全

摘 要

同步是在自然界以及人类社会中广泛存在的一种现象，如神经元细胞节律的同步、鸟群的聚集、社会群体意见的趋同、掌声的同步等；同时，在技术和工程领域中也有大量的同步策略的应用。近年来，关于混沌系统的同步、分数阶动力系统的同步以及复杂网络的同步等话题引起了诸多领域研究者的关注。

本文针对非线性动力系统与复杂网络同步及辨识的几个具体问题进行了研究，提出了一系列的新思路和新方法，主要包括：

针对相同维数以及不同维数的不确定动力系统之间的修正函数投影同步问题，基于 Lyapunov 稳定性定理和自适应控制方法，设计出同步控制器的通用形式以达到状态变量的全维同步；同时设计参数更新方程，从而辨识出全部的未知参数。

对于含不同阶次的混沌系统的同步问题，基于分数阶微积分的运算性质以及分数阶系统的稳定性定理，提出一种通用且可行的通用控制器形式，实现了整数阶与分数阶系统的同步以及不同阶次的分数阶系统的同步。

研究了不确定分数阶复杂网络的未知参数及网络拓扑的辨识问题，运用基于自适应同步的方法给出了辨识方案，推广了现有文献中关于复杂网络辨识的结果，并且讨论了影响分数阶网络成功辨识的因素。

对于含不确定参数的动力系统及复杂网络的自适应同步设计问题，在回顾了部分文献结果的基础上，我们给出了更新方程的正确设计方法，分析了辨识函数线性独立性质对参数辨识过程的影响。当辨识条件不满足时，我们提出了保证系统参数或网络拓扑正确识别的措施。

关键词：同步；复杂网络；分数阶微积分；参数辨识；自适应控制

论文类型：理论研究

Title: Research on the Synchronization and Identification of Nonlinear Dynamical Systems and Complex Networks
Speciality: Control Theory and Control Engineering
Applicant: Zhiyong Sun
Supervisor: Dr. Gangquan Si

ABSTRACT

Synchronization is a universal phenomenon widely existed in the nature and the human society, such as the collective synchrony in the neuron cells, the flocking of the birds, the consensus of the social opinions and the self-organizing synchronization of the audiences' applauds. In addition, the principles of synchronization have also been widely used in the technological and engineering field. In recent years, some hot topics such as the synchronization of chaotic systems, the synchronization of fractional dynamical systems and the synchronization of complex networks have attracted the attention among the researchers in many fields.

This thesis is devoted to some specific issues in the research topic of the synchronization and identification of nonlinear dynamical systems and complex networks. Some novel ideas and approaches have been proposed within each chapter of this thesis, which are listed as follows.

We investigated the MFPS and parameter identification of uncertain dynamical systems with identical structures and non-identical structures (or dimensions). Based on the Lyapunov stability theorem and adaptive control method, we have designed a universal controller to achieve the synchronization in such cases as well as the parameter updating laws to identify the unknown parameters.

We studied the synchronization problem between systems with different orders. According to some essential properties of fractional calculus and the stability theorems of fractional order systems, we propose a novel method for designing the controllers. Based on this method, we have achieved the synchronization between integer order systems and fractional order systems, as well as the synchronization between different fractional order systems with non-identical orders.

According to the synchronization-based identification concept, we have proposed a feasible method for the identification problem of uncertain fractional order complex networks with unknown parameters and topologies. The proposed method has generalized the current result from the literature concerning on network identification. In addition, we further discussed

ABSTRACT

the impacts of some factors which have direct influence on the identification process.

Some reported schemes on the adaptive synchronization design of dynamical systems and complex networks with unknown parameters have been revisited. We reviewed and commented on some synchronization schemes with defects from the recent literature. The importance of the linear independence condition on the identification process has been stressed. Furthermore, under the case that this condition is not satisfied, several measures have been proposed to guarantee the successful identification and estimation of the unknown system parameters or the network topologies.

KEY WORDS: Synchronization; Complex network; Fractional calculus; Parameter identification; Adaptive control

TYPE OF THESIS: Theoretical Research

目 录

1 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.1.1 自然界与人类社会中的同步现象.....	1
1.1.2 技术工程领域中的同步应用.....	1
1.2 国内外研究概况与研究热点.....	2
1.2.1 混沌系统的同步.....	2
1.2.2 分数阶动力系统的控制与同步.....	3
1.2.3 复杂网络的动力学及同步.....	3
1.2.4 基于同步的参数辨识方法.....	4
1.3 本文完成的主要工作和结构安排.....	5
2 同（异）结构不确定动力系统的 MFPS 同步及参数辨识.....	6
2.1 引言.....	6
2.2 MFPS 同步的定义.....	6
2.3 MFPS 同步及参数辨识方案.....	7
2.3.1 驱动系统维数等于响应系统维数.....	7
2.3.2 驱动系统维数大于响应系统维数.....	9
2.3.3 驱动系统维数小于响应系统维数.....	9
2.4 数值实验：三维混沌系统与四维超混沌系统之间的 MFPS 同步.....	10
2.5 本章小结.....	13
3 一种同步整数阶与分数阶混沌系统的通用方法.....	14
3.1 引言.....	14
3.2 分数阶微积分的定义及基本性质.....	14
3.3 问题描述与同步方案.....	15
3.4 数值例子：整数阶与分数阶 Lorenz 系统之间的同步.....	17
3.5 本章小结.....	18
4 不同阶次分数阶动力系统的投影同步.....	19
4.1 引言.....	19
4.2 分数阶微积分相关知识.....	19
4.2.1 分数阶微积分运算的基本性质.....	19
4.2.2 分数阶线性系统的稳定性.....	20
4.3 问题描述与同步方案.....	21

4.4 应用与数值仿真	23
4.5 相关同步方法的比较与分析	24
4.6 本章小结	26
5 分数阶复杂网络的参数估计与拓扑辨识	27
5.1 引言与背景	27
5.2 分数阶系统的稳定性	27
5.3 基于自适应同步的辨识方案	28
5.4 应用与仿真计算	33
5.4.1 恒定网络拓扑的辨识	33
5.4.2 切换网络拓扑的辨识	36
5.5 影响分数阶网络辨识的因素	36
5.5.1 耦合强度对辨识的影响	37
5.5.2 分数阶阶次对网络辨识的影响	37
5.6 本章小结	38
6 含未知参数的动力系统或复杂网络的自适应同步设计	39
6.1 引言	39
6.2 文献回顾及同步方案	39
6.2.1 不可行的参数辨识律	39
6.2.2 线性独立条件的忽视	42
6.3 辨识函数的线性独立性	44
6.3.1 线性独立条件与持续激励条件	44
6.3.2 线性独立条件不满足的典型情况	46
6.4 保证线性独立条件的措施	46
6.4.1 改变辨识函数项的结构	46
6.4.2 改变系统状态函数	47
6.4.3 改变同步轨道	47
6.5 本章小结	51
7 结论和展望	52
7.1 全文总结	52
7.2 未来研究展望	52
参考文献	54
致 谢	58
攻读学位期间取得的研究成果	59
声明	

CONTENTS

1	Preface.....	1
1.1	Research background	1
1.1.1	Synchronization phenomena in the nature and human society	1
1.1.2	The application of synchronization in the technology and engineering fields.....	1
1.2	Research review and some hot topics.....	2
1.2.1	Synchronization of chaotic systems	2
1.2.2	Control and synchronization of fractional order dynamical systems	3
1.2.3	Synchronization of complex networks.....	3
1.2.4	Synchronization-based parameter identification approach	4
1.3	Main research work and thesis arrangement.....	5
2	MFPS and parameter identification for (non-)identical dynamical systems.....	6
2.1	Introduction	6
2.2	The definition of MFPS.....	6
2.3	MFPS and parameter identification scheme.....	7
2.3.1	Driving dimensions equal to response dimensions	7
2.3.2	Driving dimensions greater than response dimensions	9
2.3.3	Driving dimensions smaller than response dimensions	9
2.4	Numerical experiment	10
2.5	Brief summary	13
3	Synchronization between integer-order and fractional-order chaotic system.....	14
3.1	Introduction	14
3.2	Some basic definitions and properties of fractional calculus.....	14
3.3	Problem formulation and synchronization scheme	15
3.4	Numerical experiment	17
3.5	Brief summary.....	18
4	Projective synchronization of different fractional-order chaotic systems with non-identical orders	19
4.1	Introduction	19
4.2	Preliminaries on fractional calculus	19
4.2.1	Some properties of fractional calculus	19
4.2.2	Stability theorems of fractional-order system	20
4.3	Problem formulation and synchronization scheme	21
4.4	Applications and numerical simulations	23
4.4	A comparison of some relevant methods	24
4.5	Brief summary.....	26
5	Parameter estimation and topology identification of uncertain fractional order complex	

CONTENTS

networks	27
5.1 Introduction and background.....	27
5.2 Stability theorems of fractional-order dynamical systems	27
5.3 Adaptive synchronization-based identification scheme	28
5.4 Applications and numerical calculations.....	33
5.4.1 Identification of fractional order network with static topology	33
5.4.2 Identification of fractional order network with switching topology	36
5.5 Factors which influence a successful identification process	36
5.5.1 The impact of coupling strength on the identification process	37
5.5.2 The impact of fractional order on the identification process.....	37
5.6 Brief summary	38
6 Adaptive synchronization design for nonlinear dynamical systems or complex networks in the presence of unknown system parameters	39
6.1 Introduction	39
6.2 Review and comments on some reported schemes with defects.....	39
6.2.1 Infeasible parameter updating laws	39
6.2.2 The neglect of the linear independence (LI) condition	42
6.3 The LI property of the identification functions	44
6.3.1 The relationship between LI condition and PE condition	44
6.3.2 There typical cases when the LI condition would be violated	46
6.4 Measures on guaranteeing the LI condition	46
6.4.1 Changing the structures of the identification function groups	46
6.4.2 Adding extra signals to the state functions.....	47
6.4.3 Altering the synchronization orbits	47
6.5 Brief summary	51
7 Conclusions and Suggestions	52
7.1 Summary of the thesis	52
7.2 Some directions for future research.....	52
References	54
Acknowledgements	58
Achievements	59
Declaration	

1 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 自然界与人类社会中的同步现象

同步是自然界中十分常见的一种现象。早在 17 世纪，荷兰的科学家惠更斯就观察到同一横梁上的钟摆的同步运动^[1]。随后，人们在自然界很多地方都观察到同步的现象，比如生物体内时钟的同步、神经元细胞节律的同步、鸟群的聚集、夏日中蝉的集体鸣叫、夏日夜晚的青蛙齐鸣、萤火虫的集体发光等。在专著[2]中，列举和收集了许多存在于自然界中常见的同步现象。

事实上，除在自然界中，在人类生活以及社会中也存在大量的同步现象。比如群体意见的形成、同一公司的员工因长久接触而习惯趋同等。一个十分有趣也十分典型的现象是剧院掌声的同步：一开始人们的掌声是错落无规律的，然而随着时间推移，掌声会逐渐向着统一的节拍和频率靠近，从而最终达到一致。文献[3]通过记录实际的掌声序列，以非线性动力学的观点研究了这一现象。

正如惠更斯最早所指出的那样，钟摆的摆动同步是因为悬挂钟摆的横梁之间的相互作用。事实上，同步的发生，来源于两个（或多个）系统之间存在的相互关系或者耦合作用，从而造成其状态、演化等逐渐趋于一致。这是同步现象发生的最基本的原因所在。比如，研究者观察到自然界中生物种群的数量演化在表面的复杂现象中又呈现出内在周期性有规律的起落，文献[4]通过构建一类空间广义生物模型（spatially extended ecological systems），将实测时间序列与构建模型对比，揭示出种群起落有着相同步（phase synchronization）的内在规律。又如，纳米振子之间有旋转力矩的相互影响，最近的研究^[5]表明正是这种影响使得振子的相位锁定一致，而这个思想与自然界中的萤火虫集体发光的现象机理是一致的。

对于自然界或人类社会中存在其他更复杂的趋同行为，许多研究者希望能从数学或物理角度得到更清晰的机理分析，或者通过同步的思想去得到解释。这使得同步的研究一直是物理学、非线性科学、生理医学等多个领域中的热点话题^[6-8]。

总而言之，同步是复杂系统中因自组织和相互耦合导致的一种特有现象。正如文献[2]的书名所指出的一样：同步是非线性科学中的一个普适概念（Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences）。

1.1.2 技术工程领域中的同步应用

在与我们的生活密切相关的很多方面，都能看到同步概念或同步策略的应用。例如，在计算和工程领域中，存在着以网络形式互相耦合的分布式系统，在同一个目标的约束下，需对这些分布系统施加协调控制，以使其达到某种指标的一致；另外，随着分

布式系统规模的日趋增大,这个工作也变得越来越有挑战性^[9]。又如在机械传动领域中,很多情况下需要多个机器或部件(如杆件、转轴、活塞等)同时动作或者有相同的速度、角速度、相位等,从而达到最优的控制效果^[10]。

了解自然界中的同步现象背后的机理,有助于人们更好地利用同步。文献[11]用 Kuramoto 模型来分析电网里的振荡及同步发生的原因,这对于如何优化设计电网结构有很好的借鉴意义。另外,在有些场合或有些时候同步是有害的,此时可通过分析同步的发生机理来抑制或消除同步的发生。比如生理学中病变脑同步节律导致一些精神上疾病的发生,文献[12]通过分析同步节律发生的机理,提出一种延时反馈控制的方法来抑制同步节律的产生。另一个典型的例子可见文献[13]:2000年6月英国伦敦桥落成时,成千上万的人同时通过大桥导致桥体产生大幅摆动。这个事件发生后,人们对桥进行了修正,使其能吸收行人通过而产生的大量同步共振能量,从而尽量消除事故的发生。

由同步(synchronization)概念所引申的一致性(consensus)的概念,也正在日益受到控制学科的研究者的关注。近几年来,多智能体的一致性、无人机的协调驾驶、分布式传感器协调定位、多飞行器的编队控制等研究话题成为国际控制学界的研究热点^[14-15];国际控制学界的几本主流控制期刊如 Automatica、IEEE Transactions on Automatic Control、Systems and Control Letters 等几乎每期都会有这方面的论文。

同步还可以用来揭示动力系统或复杂网络的内部信息,比如文献[16]阐释了如何通过同步过程来了解复杂网络的拓扑尺度或者社团结构。利用同步的概念来识别或揭示系统的未知参数,在最近十年来吸引了很多研究者的研究兴趣,这点将在1.2.4节详述。

在动力系统同步的研究中,一个十分热门的方向是混沌系统的同步,这点将在1.2.1节详述。

1.2 国内外研究概况与研究热点

1.2.1 混沌系统的同步

自从 Lorenz 从气象学的对流运动中提出第一个混沌系统后,从上世纪半叶一直到现在,混沌学研究的热潮一直没有停止过。最初人们认为混沌是难以控制的,但1990年 L.M. Pecora 和 T.L. Carroll 发表在 Physical Review Letters 上的一篇关于混沌同步的开创性文章^[17]改变了人们的看法,混沌同步的研究成为非线性动力学领域的研究热点。

到现在为止,人们提出了多种同步混沌系统的方法。除了 L.M. Pecora 和 T.L. Carroll 所提出的驱动-响应法外,还有线性反馈、主动控制、自适应控制、滑膜控制、反推控制等多种方法^[18-19]。除了最早被研究的完全同步(complete synchronization)外,人们还提出或者发现了其他多种同步形式,如相同步(phase synchronization)、广义同步(generalized synchronization)、投影同步(projective synchronization)、延迟同步(lag synchronization)等等^[4,19-20]。

混沌系统同步研究的主要应用是在保密通信领域。因混沌信号本身的初值敏感、

非周期、类噪声等特性，使得混沌系统特别适合信息的隐藏和加密。混沌同步的研究为保密通信方案提供了信号隐藏和恢复的可行手段，目前人们已经提出多种保密通信方案，如信号掩盖、混沌键控、参数调制等^[21]。另外，混沌系统以及混沌同步的研究也在其他很多领域，如生物工程、化学、经济学甚至是音乐、艺术等人文领域，都有着广泛的应用^[21-22]。

1.2.2 分数阶动力系统的控制与同步

分数阶微积分是常规整数阶微积分概念的扩展，最早可见于 1695 年 L' Hospital 给莱布尼茨的通信里，首次提出的半阶导数 ($d^{1/2}x/dx^{1/2}$) 的概念。在长达几个世纪的发展中，包括莱布尼茨、拉普拉斯、欧拉、傅里叶等在内的许多数学家都对分数阶微积分的研究作出了有重要意义的工作。然而分数阶微积分理论及其应用研究的兴起，却是最近几十年的事。力学、复杂物理、生物工程等许多领域的建模问题是推动分数阶微积分发展的主要动力。研究者发现，分数阶微积分在描述具有分形、湍流、粘弹性、反常扩散等实际物理现象或物理系统时，相对于常规微积分而言有着更强大的优势。在专著^[23]中，作者列举了分数阶导数用于力学与工程建模的大量实例。另外，在进入本世纪以来，分数阶建模与控制的方法和理论已经渗透到高能物理、系统控制、经济学、生物医学工程等诸多领域中^[24-25]。

对于分数阶系统的控制，最近几年来一直是控制学科中的活跃分支。早在 1996 年，Matignon D 就给出了分数阶线性系统的稳定性定理^[26]，而 1999 年 Podlubny I 提出了分数阶 PID 的概念^[27]，这些工作对于控制分数阶动力系统的研究有着深远的影响。目前，人们在分数阶系统能观能控性分析、非线性分数阶系统控制、分数阶系统辨识等方向都取得了较大进展^[28-29]。

在分数阶动力系统的研究中，分数阶混沌系统也一直吸引着众多研究者的兴趣。人们在尝试用分数阶微积分来描述一个常规混沌系统时，会得到一系列有趣也有意义的结论。比如，Hartley TT 等^[30]在研究分数阶 Chua 电路时，发现总阶数小于 3 时，系统仍能保持混沌特性，这与常规的整数阶混沌系统所得到的结论（若使系统保持混沌状态，则阶数不能小于 3）并不一致。Grigorenko I 等^[31]研究了分数阶 Lorenz 系统的动力学特性；随后，许多动力系统模型（如 Van der Pol 振子模型、Duffing 模型、Lotka-Volterra 生物系统等）以及混沌系统（如 Rössler 系统，Chen 系统、Lü 系统等）都被扩展到了分数阶导数来描述。在 Ivo Petráš 最近所著的一本专著^[32]的第五章中，分析了许多分数阶动力系统的特性以及控制方法。另外，人们也将整数阶混沌系统的许多同步方法（如线性反馈控制、主动控制、主动滑模控制等），也扩展并应用到分数阶混沌系统的同步之中，并取得了较好效果^[33]。

1.2.3 复杂网络的动力学及同步

复杂网络的概念其实很早就有，例如在上世纪 60 年代人们就提出了随机网络的模型。但是复杂网络的研究热潮却出现于最近十多年，这源于两篇开创性的文章，即 1998

年 Watts 和 Strogatz 所提出的小世界网络模型^[34]以及 Barabasi 和 Albert 提出的无标度网络模型^[35]。随后, 包括数学、控制工程、物理、社会学等诸多领域的很多研究者都加入到复杂网络的研究中, 试图以复杂网络的视角, 对现实生活中存在的网络现象进行建模、实证分析以至于预测。2009 年 7 月的《science》杂志出版了一期“complex systems and networks”的专辑, 2010 年国内的《复杂系统与复杂性科学》杂志在也出了一期“网络科学”专刊, 对生物网络、网络拓扑、网络同步与辨识等网络科学的多个研究课题的发展进行了梳理。

复杂网络的同步研究可以看成是对耦合动力系统同步问题的推广, 然而其研究方法 & 难度却不同于后者。2002 年, Wang 和 Chen 提出如下的耦合动力网络模型^[36]

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i) + \sum_{j \neq i, j=1}^N c_{ij} A(x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1-1)$$

其中, N 为网络的节点数, 每个节点 n 的动力学方程 $\dot{x}_i(t) = f(x_i)$, 既可以是常规动力方程也可以是复杂混沌系统或神经元系统, A 是内部耦合强度矩阵, $C = (c_{ij})_{N \times N}$ 是表示网络拓扑结构的耦合矩阵, 若节点 i 有连接通向节点 j , 则 $c_{ij} = \theta > 0$ (θ 为连接的边数), 否则 $c_{ij} = 0$ 。这个模型为人们研究复杂网络的同步提供了一个切入点, 后来的许多研究者将其推广到离散网络、自适应网络、非线性耦合网络、时滞网络等多种网络模型中^[37-38]。

另外, 在最近几年内, 分数阶网络的同步或分数阶智能体的一致性也吸引了部分研究者的兴趣。如文献[39]首先提出了分数阶加权网络模型, 并分析了用牵制控制(pinning control)的方法来控制和同步分数阶网络的性能; 而文献[40]则研究了星型连接的分数阶复杂网络的同步问题。这些研究发现, 相对于整数阶网络而言, 分数阶复杂网络有着其独特的动力学特性。

1.2.4 基于同步的参数辨识方法

利用同步来辨识系统的未知参数, 其基本思想是构造一个与原有模型结构一致的响应模型(或称计算模型), 在两者之间施加耦合控制器, 使得原有模型和响应模型的状态演化趋于一致, 并根据同步误差最小化的准则设计参数更新律来估计未知参数。

基于同步的辨识方法最早可见 Parlitz U. 在 1996 年的一篇文章^[41], 其中 Parlitz U. 对 Lorenz 系统中的未知参数分别设计了参数更新律, 根据观测得到的 Lorenz 系统状态序列, 最终得到了系统的真实值。但随后有其他研究者怀疑这种方法是否一定能辨识所有未知参数的真实值。2004 年的一篇评论文章^[42]指出 Parlitz U. 论文的结果^[41]缺少严格的理论分析, 认为仅以数值仿真来证明参数的成功辨识是不可靠的; 之后的又一篇评论文章^[43]运用 LaSalle 不变集理论, 对文献[41]的结果给出了严格的理论分析。Huang 在文献[44]中的分析认为, 动力系统状态信号的混沌特性是辨识成功的必要条件。其实这个论断仍然不准确。在文献[45]中, Lin 等针对 Huang 在文献[44]的论断举出了一个反例, 并最终证明线性独立的条件才是保证辨识成功的充分条件。事实上, 基于自适

应同步的辨识方案与自适应控制领域中的自适应观测器设计的理念是类似的, Antonio Loria 在文献[46]中详细论述了两者的关系。

复杂网络的拓扑直接决定复杂网络的功能, 因此拓扑的辨识在复杂网络的研究中是一个很有意义也很重要的工作。Yu 和 Righero 等人最早将基于同步的辨识方法应用到复杂网络的拓扑估计中^[47], 随后 Wu 等^[48]将这种方法应用到加权网络的拓扑识别中。但他们的工作都忽视了拓扑识别的必要条件。国内武汉大学的陆君安小组在网络拓扑识别方向做了很多有意义的工作, 而且正确推导出了网络辨识的充要条件^[49-50]。

1.3 本文完成的主要工作和结构安排

本文讨论了动力系统与复杂网络同步和辨识的几个具体问题, 对同结构以及不同维数的动力系统之间的全状态同步与辨识、整数阶及分数阶混沌系统的同步、分数阶复杂网络的辨识、带不确定参数的动力系统的同步设计等几个话题提出了一系列新思路和新方法。具体内容和结构安排如下:

第 2 章主要讨论相同维数以及不同维数的动力系统之间的修正函数投影同步(modified function projective synchronization)问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论和 LaSalle 不变集理论给出了同步控制器的设计形式和未知参数的更新方程, 并且推广了部分文献的结果。

第 3 章针对整数阶与分数阶混沌系统的同步问题, 基于分数阶微积分的运算性质, 通过设计子控制器将该问题转化为常规整数阶系统的同步设计, 并给出了一种通用方法。

第 4 章是第 3 章内容的推广, 讨论不同阶次的分数阶动力系统的投影同步, 基于分数阶线性系统的稳定性定理和分数阶微积分的运算性质, 给出了设计同步控制器的一种简单可行的方法。

第 5 章针对不确定分数阶复杂网络的参数估计和拓扑辨识问题, 基于自适应同步的方法给出了完整的理论解答, 同时讨论了影响分数阶网络成功辨识的因素。

第 6 章针对含不确定参数的系统或网络的自适应同步设计问题, 回顾和修正了部分文献中的不准确结果, 讨论了线性独立条件与持续激励条件的关系以及这两个条件不满足时的典型情况, 并提出了几项措施以保证参数或拓扑的正确识别。

最后一章是结论及展望, 对全文的研究工作进行了总结, 并对未来的研究提出了几个方向。

2 同（异）结构不确定动力系统的 MFPS 同步及参数辨识

2.1 引言

早期关于动力系统同步的研究多局限于两个全同的系统（如文献[17,51]的工作），后来人们将同步方案推广到两个不恒同的系统中，如文献[52]基于主动控制法（active control）研究了 Rössler 系统与 Chen 系统之间的同步问题。然而关于不同维数的系统之间的同步问题，则较少文献涉及。事实上，在很多领域所观察到的同步现象，不仅能存在于不同结构的系统之间，甚至能存在于不同维数的系统之间^[53]。因此，研究不同维数之间的系统同步也有着很重要的意义。

最近, Du 等^[54]提出了一种新的同步形式,称为修正函数投影同步(modified function projective synchronization, MFPS)。在 MFPS 中,响应系统能同步到驱动系统的投影函数而不是状态本身,而且每个状态之间的函数不尽相同,将其应用于保密通信中将显著提高保密性能。另外,这种同步形式也涵盖了之前其他研究者提出的多种同步方式,是一种更为广义的同步。因此本章研究不同结构(维数)之间的 MFPS;同时,我们假设驱动系统和响应系统的参数都是未知的或者不确定的。我们将设计控制器以及参数辨识律,使得不全同的两个动力系统既能达到全状态的 MFPS 同步,又能辨识全部的未知参数。

2.2 MFPS 同步的定义

考虑如下驱动与响应系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}\quad (2-1)$$

其中, \mathbf{x} , \mathbf{y} 是系统状态变量, \mathbf{f} , \mathbf{g} 是函数向量, $\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是响应系统中的控制函数项。定义同步误差为

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\Delta}(t)\mathbf{x}\quad (2-2)$$

其中, $\boldsymbol{\Delta}(t)$ 是 n 阶对角矩阵函数, 即 $\boldsymbol{\Delta}(t) = \text{diag}(\Delta_1(t), \Delta_2(t), \dots, \Delta_n(t))$ ($\Delta_i(t)$ 是连续可微且有界的函数且有 $\Delta_i(t) \neq 0$)。若存在函数矩阵 $\boldsymbol{\Delta}(t)$ 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\Delta}(t)\mathbf{x}\| = 0$, 则称驱动与响应系统可实现 MFPS 的同步。

注 2.1 若 $\Delta_1(t) = \Delta_2(t) = \dots = \Delta_n(t)$, 则驱动系统与响应系统实现函数投影同步 (function projection synchronization)。若 $\Delta_i(t)$ 取非零常数值, 则 MFPS 退化为为通常的投影同步^[55] (projective synchronization)。进一步的, 若常数值取为 -1 或者 1, 则驱动系统与响

应系统可分别实现反同步^[56]（anti-synchronization）或者完全同步^[17]（complete synchronization）。简而言之，MFPS 是一种更为广义和通用的同步概念，涵盖了之前文献中研究的多种同步形式。

2.3 MFPS 同步及参数辨识方案

假设驱动系统与响应系统中的参数均未知，将式(2-1)重写如下：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\boldsymbol{\Phi} \quad \rightarrow \text{驱动系统} \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{G}_2(\mathbf{y})\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \rightarrow \text{响应系统}\end{aligned}\quad (2-3)$$

在驱动系统中， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \in R^{n_1}$ 是系统状态变量向量， $\mathbf{F}_1: R^{n_1} \rightarrow R^{n_1}$ 是连续的函数向量， $\mathbf{G}_1: R^{n_1} \rightarrow R^{n_1 \times m_1}$ 是参数依赖的函数矩阵， $\boldsymbol{\Phi} \in R^{m_1}$ 是参数向量。在响应系统中， $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \in R^{n_2}$ 、 $\mathbf{F}_2: R^{n_2} \rightarrow R^{n_2}$ 、 $\mathbf{G}_2: R^{n_2} \rightarrow R^{n_2 \times m_2}$ 、 $\boldsymbol{\Theta} \in R^{m_2}$ 有着类似的定义。 $\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是控制器。注意 n_1 表示驱动系统的维数，而 n_2 表示响应系统的维数。

下面我们将给出控制器以及参数辨识律的通用设计方法，并将其扩展至驱动系统与响应系统有着不同维数的情形中。

2.3.1 驱动系统维数等于响应系统维数

这种情况下响应系统与驱动系统有着相同的维数，根据 MFPS 同步的定义，误差系统为 $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{y}} - \Delta(t)\dot{\mathbf{x}} - \dot{\Delta}(t)\mathbf{x}$ ，将式(2-3)代入，则

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{G}_2(\mathbf{y})\boldsymbol{\Theta} - \Delta(t)[\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\boldsymbol{\Phi}] - \dot{\Delta}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2-4)$$

令 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ 及 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ 表示未知参数的估计值。根据主动控制法^[52]及自适应控制方法^[57]，控制器设计为

$$\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(t)\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{y}) + \dot{\Delta}(t)\mathbf{x} + \Delta(t)\mathbf{G}_1(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\Phi}} - \mathbf{G}_2(\mathbf{y})\hat{\boldsymbol{\Theta}} - \mathbf{K}\mathbf{e} \quad (2-5)$$

参数辨识律采取如下形式

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\Phi}}} = -[\Delta(t)\mathbf{G}_1(\mathbf{x})]^T \mathbf{e} = -\mathbf{G}_1^T(\mathbf{x})\Delta(t)\mathbf{e} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \mathbf{G}_2^T(\mathbf{y})\mathbf{e} \end{cases} \quad (2-6)$$

在控制器函数(2-5)中， $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 表示各个状态变量的控制器的控制增益，可通过调整 \mathbf{K} 值得到不同的同步速度。

式(2-4)中，很显然 ($\mathbf{e} = \mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}, \hat{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{\Theta}$) 是误差系统的一个平衡点。令 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi} - \hat{\boldsymbol{\Phi}}$ 及 $\tilde{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{\Theta} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}$ 表示参数的估计误差。选取如下的 Lyapunov 函数

$$V = (\mathbf{e}^T \mathbf{e} + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^T \tilde{\boldsymbol{\Theta}} + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}}) / 2 \quad (2-7)$$

对式(2-7)沿着误差系统项(2-4)求微分，可得（注意到 $\dot{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}} = -\dot{\hat{\boldsymbol{\Phi}}}$ 及 $\dot{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}} = -\dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}$ ）

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} + \tilde{\Phi}^T \dot{\tilde{\Phi}} + \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} \\
&= \mathbf{e}^T \{F_2(\mathbf{y}) + G_2(\mathbf{y})\Theta - \Delta(t)[F_1(\mathbf{x}) + G_1(\mathbf{x})\Phi] - \dot{\Delta}(t)\mathbf{x} \\
&\quad + \Delta(t)F_1(\mathbf{x}) - F_2(\mathbf{y}) + \dot{\Delta}(t)\mathbf{x} + \Delta(t)G_1(\mathbf{x})\hat{\Phi} - G_2(\mathbf{y})\hat{\Theta} - \mathbf{K}\mathbf{e}\} \\
&\quad + \tilde{\Phi}^T [G_1^T(\mathbf{x})\Delta(t)\mathbf{e}] + \tilde{\Theta}^T [-G_2^T(\mathbf{y})\mathbf{e}] \\
&= \mathbf{e}^T [G_2(\mathbf{y})(\Theta - \hat{\Theta}) - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})(\Phi - \hat{\Phi})] + \tilde{\Phi}^T [G_1^T(\mathbf{x})\Delta(t)\mathbf{e}] + \tilde{\Theta}^T [-G_2^T(\mathbf{y})\mathbf{e}] - \mathbf{e}^T \mathbf{K}\mathbf{e} \\
&= -\mathbf{e}^T \mathbf{K}\mathbf{e} \leq 0
\end{aligned} \tag{2-8}$$

$\dot{V} = 0$ 仅在 $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ 时成立, 根据 Barbalat 引理, 可得 $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时成立, 即实现 MFPS, 但此时并不能推导出参数辨识成功的结论, 我们所能得到的只有 $\dot{\hat{\Phi}} = \mathbf{0}$ 及 $\dot{\hat{\Theta}} = \mathbf{0}$, 要从 $\dot{\hat{\Phi}} = \mathbf{0}$ 及 $\dot{\hat{\Theta}} = \mathbf{0}$ 推导出 $\tilde{\Phi} = \mathbf{0}$ 及 $\tilde{\Theta} = \mathbf{0}$ 仍需满足其他条件才可。

根据 Lasalle 不变集理论^[58], 最大不变集 M 为

$$M = \{\mathbf{e} \in R^n, \tilde{\Phi} \in R^{m_1}, \tilde{\Theta} \in R^{m_2} \mid \mathbf{e} = \mathbf{0}, G_2(\mathbf{y})\tilde{\Theta} - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})\tilde{\Phi} - \mathbf{K}\mathbf{e} = \mathbf{0}\} \tag{2-9}$$

我们可得到 $G_2(\mathbf{y})\tilde{\Theta} - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})\tilde{\Phi} = \mathbf{0}$ 。为保证该方程有唯一解 $\tilde{\Phi} = \mathbf{0}$ 和 $\tilde{\Theta} = \mathbf{0}$, (即未知参数均被辨识到真值 $\hat{\Phi} = \Phi$, $\hat{\Theta} = \Theta$), 需满足如下条件:

线性独立(Linear Independence, LI) 条件: 在基于同步的参数辨识方法中, 函数向量 $-G_1^T(\mathbf{x})\Delta(t)$ 和 $G_2^T(\mathbf{y})$ 在同步流形上需满足线性独立的条件。

注 2.2. 该条件事实上与自适应控制中的持续激励 (Persistence Excitation, PE) 条件^[57]是一致的, 即在辨识未知参数时, 必须提供频率足够丰富的输入信息。当线性独立条件不满足时, 参数辨识将会失败。

推论 2.1 进一步假设驱动系统与响应系统结构相同, 即 $F_1 = F_2$ 以及 $G_1\Phi = G_2\Theta$, 则控制器和参数辨识律为

$$\begin{cases} \psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(t)F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{y}) + \dot{\Delta}(t)\mathbf{x} + [\Delta(t)G_1(\mathbf{x}) - G_1(\mathbf{y})]\hat{\Phi} - \mathbf{K}\mathbf{e} \\ \dot{\hat{\Phi}} = [G_1(\mathbf{y}) - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})]^T \mathbf{e} \end{cases} \tag{2-10}$$

类似的, 为使参数辨识成功, 函数项 $[G_1(\mathbf{y}) - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})]$ 必须满足线性独立 (或持续激励) 的条件。有时函数项 $[G_1(\mathbf{y}) - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})]$ 会随着同步过程而趋于零, 此时格拉姆矩阵 $Q = \int_t^{t+\delta} [G_1(\mathbf{y}) - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})]^T [G_1(\mathbf{y}) - \Delta(t)G_1(\mathbf{x})] d\delta$ 需满足满秩的条件, 即激励时间需长于瞬态时间, 更多讨论可见文献[59]。

推论 2.2 假设驱动系统的参数 Φ 已知, 则控制器和参数辨识律 (式(2-5)与式(2-6)) 修正为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta(t)\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{y}) + \dot{\Delta}(t)\boldsymbol{x} + \Delta(t)\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{y})\hat{\boldsymbol{\Theta}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \boldsymbol{G}_2^T(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e} \end{cases} \quad (2-11)$$

推论 2.3 假设响应系统的参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 已知，则控制器和参数辨识律（式(2-5)与式(2-6)）修正为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta(t)\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{y}) + \dot{\Delta}(t)\boldsymbol{x} + \Delta(t)\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Phi}}} = -\boldsymbol{G}_1^T(\boldsymbol{x})\Delta(t)\boldsymbol{e} \end{cases} \quad (2-12)$$

2.3.2 驱动系统维数大于响应系统维数

在这种情况下，为取得不同维数的两个系统之间的 MFPS 形式的同步，可在响应系统中增加辅助状态变量，将辅助变量设为 $\boldsymbol{y}' \in R^{n_1-n_2}$ ，即有 $\dot{\boldsymbol{y}}' = \boldsymbol{\psi}'(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ，其中 $\boldsymbol{\psi}'(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R^{n_1-n_2}$ 是辅助控制器项，响应系统修正为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{y}}} = \bar{\boldsymbol{F}}_2(\bar{\boldsymbol{y}}) + \bar{\boldsymbol{G}}_2(\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{\Theta} + \bar{\boldsymbol{\psi}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (2-13)$$

其中，

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{F}}_2(\bar{\boldsymbol{y}}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{y}) \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{G}}_2(\bar{\boldsymbol{y}}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{y}) \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{\psi}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{\psi}'(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

则控制器与参数辨识律修正为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta(t)\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) - \bar{\boldsymbol{F}}_2(\bar{\boldsymbol{y}}) + \dot{\Delta}(t)\boldsymbol{x} + \Delta(t)\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{\Phi}} - \bar{\boldsymbol{G}}_2(\bar{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{\Theta}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Phi}}} = -\boldsymbol{G}_1^T(\boldsymbol{x})\Delta(t)\boldsymbol{e} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \bar{\boldsymbol{G}}_2^T(\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e} \end{cases} \quad (2-15)$$

其他的证明与分析过程与 2.3.1 节类似。

注 2.3 此处对于不同维数的处理，与文献[60-61]所用的策略不同。文献[60-61]中采用的是降维同步，即响应系统只与驱动系统中的部分状态变量达到同步。本文中通过构建辅助控制器，可实现全维全状态的同步。

2.3.3 驱动系统维数小于响应系统维数

在这种情况下，驱动系统维数小于响应系统，借助广义同步的概念^[20]，使得响应系统中的其余状态变量可与驱动变量组成的变量函数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 形成同步。设由变量函数组成的辅助状态为 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in R^{n_2-n_1}$ ，其中， $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_2-n_1}) \in R^{n_2-n_1}$ 。令驱动系统中的辅助变量的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}' = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}'_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}'_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Phi}$ ，此时驱动系统修正为一个新的 n_2 维的系统

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{x})\Phi \quad (2-16)$$

其中

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}'_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{G}'_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

控制器与参数辨识律修正为

$$\begin{cases} \psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(t)\bar{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{y}) + \dot{\Delta}(t)\bar{\mathbf{x}} + \Delta(t)\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{x})\hat{\Phi} - \mathbf{G}_2(\mathbf{y})\hat{\Theta} - \mathbf{K}e \\ \dot{\hat{\Phi}} = -\bar{\mathbf{G}}_1^T(\mathbf{x})\Delta(t)e \\ \dot{\hat{\Theta}} = \mathbf{G}_2^T(\mathbf{y})e \end{cases} \quad (2-18)$$

其余分析与证明过程与 2.3.1 节的情形 I 类似。

注 2.4 如注 2.1 所指出的, MFPS 同步形式概括了一大类常见的同步形式; 因此上文中的理论结果 (控制器以及未知参数更新律的设计方法) 可直接推广到动力系统的投影同步、反同步或者全同步等形式中。换句话说, 相对于已有文献[52,54,62]中的结论, 本章中给出了一个更为一般的结果。

2.4 数值实验: 三维混沌系统与四维超混沌系统之间的 MFPS 同步

在本节中, 我们给出一个具体的例子来说明上述方法的有效性。

将三维的 Sprott-L 系统^[63]作为驱动系统, 四维的超混沌 Lorenz 系统^[64]作为响应系统, 两个系统分别描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_3 = 1 - c_1 x_1 \end{cases} \quad (2-19)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_2(y_2 - y_1) + y_4 + \psi_1 \\ \dot{y}_2 = -y_1 y_3 + r_2 y_1 - y_2 + \psi_2 \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - b_2 y_3 + \psi_3 \\ \dot{y}_4 = -y_1 y_3 + d_2 y_4 + \psi_4 \end{cases} \quad (2-20)$$

响应系统中的多余变量 y_4 可与由驱动变量组成的状态函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 实现同步。在此, 我们设 $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$, 即状态函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 为各状态变量之和, 定义

$$\bar{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 \\ x_3 & x_1^2 & -x_1 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

以及

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_4 \\ -y_1 y_3 - y_2 \\ y_1 y_2 \\ -y_1 y_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_2(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix} \quad \Theta = \begin{bmatrix} a_2 \\ r_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

从式(2-22)可看出，所有的辨识函数项都是线性独立的，因此未知参数都能辨识。根据所提出的方法，控制器设计如下

$$\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1(t)x_2 - y_4 + \dot{\Delta}_1(t)x_1 + \hat{a}_1\Delta_1(t)x_3 - \hat{a}_2(y_2 - y_1) \\ -\Delta_2(t)x_2 + y_1 y_3 + y_2 + \dot{\Delta}_2(t)x_2 + \hat{b}_1\Delta_2(t)x_1^2 - \hat{r}_2 y_1 \\ \Delta_3(t)(1 - \hat{c}_1 x_1) + \dot{\Delta}_3(t)x_3 - y_1 y_2 + \hat{b}_2 y_3 \\ \Delta_4(t)(1 + \hat{a}_1 x_3 + \hat{b}_1 x_1^2 - \hat{c}_1 x_1) + \dot{\Delta}_4(t)(x_1 + x_2 + x_3) + y_1 y_3 - \hat{d}_2 y_4 \end{bmatrix} - \mathbf{K}\mathbf{e} \quad (2-23)$$

其中 $\mathbf{e} = [y_1 - \Delta_1 x_1, y_2 - \Delta_2 x_2, y_3 - \Delta_3 x_3, y_4 - \Delta_4(x_1 + x_2 + x_3)]^T$ 。

驱动系统中未知参数的辨识方程为

$$\dot{\hat{\Phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{a}}_1 \\ \dot{\hat{b}}_1 \\ \dot{\hat{c}}_1 \end{bmatrix} = -\bar{\mathbf{G}}_1^T(\mathbf{x})\Delta(t)\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\Delta_1(t)x_3 e_1 - \Delta_4(t)x_3 e_4 \\ -\Delta_2(t)x_1^2 e_2 - \Delta_4(t)x_1^2 e_4 \\ \Delta_3(t)x_1 e_3 + \Delta_4(t)x_1 e_4 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

响应系统中未知参数的辨识方程为

$$\dot{\hat{\Theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{a}}_2 \\ \dot{\hat{r}}_2 \\ \dot{\hat{b}}_2 \\ \dot{\hat{d}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2^T(\mathbf{y})\mathbf{e} = \begin{bmatrix} (y_2 - y_1)e_1 \\ y_1 e_2 \\ -y_3 e_3 \\ y_4 e_4 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

驱动系统与响应系统中的参数真实值分别为 $a_1 = 3.9$ ， $b_1 = 0.9$ ， $c_1 = 1$ 以及 $a_2 = 10$ ， $r_2 = 28$ ， $b_2 = 8/3$ ， $d_2 = 1.3$ 。控制增益选取为 $k_{i(i=1\sim 4)} = 2$ ，各系统变量的初值为 $\mathbf{x}(0) = [3, 17, -6]^T$ 及 $\mathbf{y}(0) = [-5, 10, 5, 6]^T$ 。在未知参数的辨识方程中，估计初值选为 $[\hat{a}_1(0), \hat{b}_1(0), \hat{c}_1(0)]^T = [0.1, 0.1, 3]^T$ 及 $[\hat{a}_2(0), \hat{r}_2(0), \hat{b}_2(0), \hat{d}_2(0)]^T = [5, 5, 20, 5]^T$ 。在数值仿真中，比例函数选为

$$\begin{cases} \Delta_1(t) = 0.30 + 0.20 \sin(1.0\pi t), \dot{\Delta}_1(t) = 0.20\pi \cos(1.0\pi t) \\ \Delta_2(t) = 0.40 + 0.30 \sin(2.0\pi t), \dot{\Delta}_2(t) = 0.60\pi \cos(2.0\pi t) \\ \Delta_3(t) = 0.50 + 0.40 \sin(3.0\pi t), \dot{\Delta}_3(t) = 1.20\pi \cos(3.0\pi t) \\ \Delta_4(t) = 0.45 + 0.35 \sin(3.0\pi t), \dot{\Delta}_4(t) = 1.05\pi \cos(3.0\pi t) \end{cases} \quad (2-26)$$

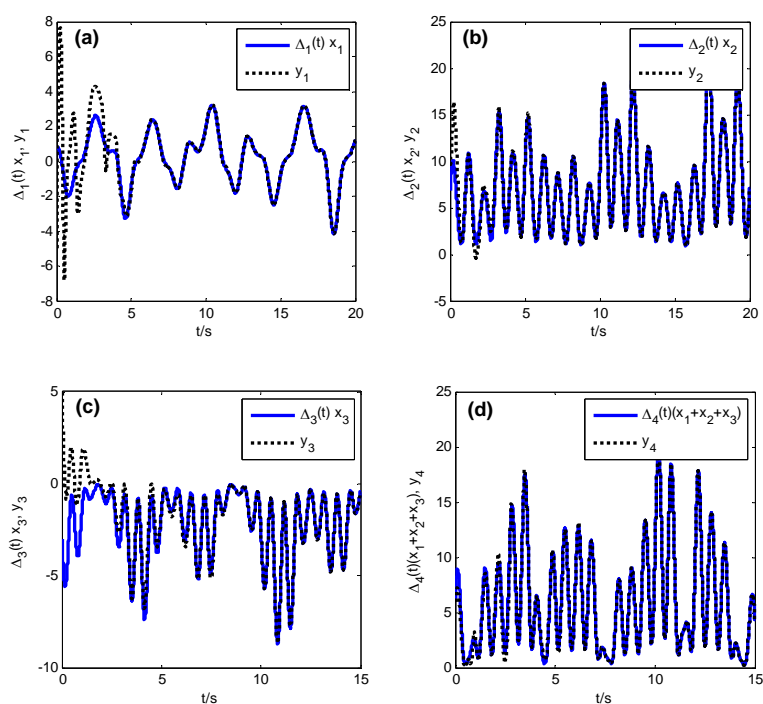


图 2-1 驱动系统与响应系统间相应状态变量的时间演化

(a) $\Delta_1(t)x_1$ 与 y_1 ; (b) $\Delta_2(t)x_2$ 与 y_2 ; (c) $\Delta_3(t)x_3$ 与 y_3 ; (d) $\Delta_4(t)(x_1+x_2+x_3)$ 与 y_4

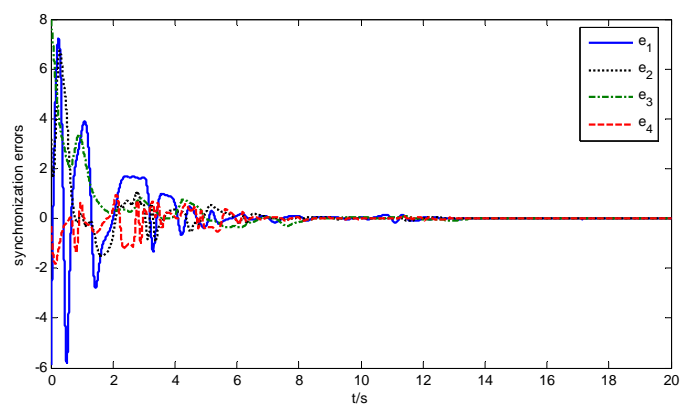
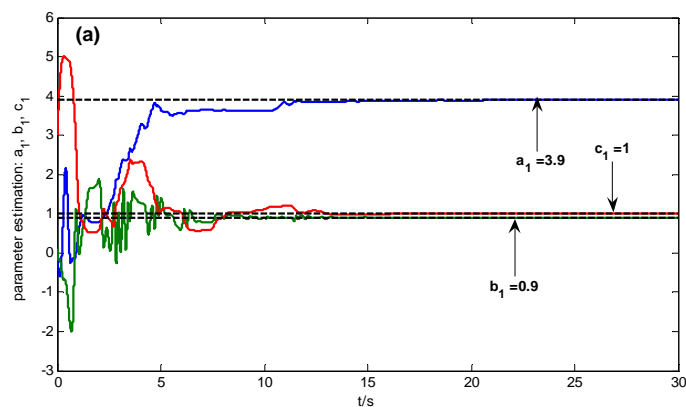


图 2-2 MFPS 同步误差的时间演化



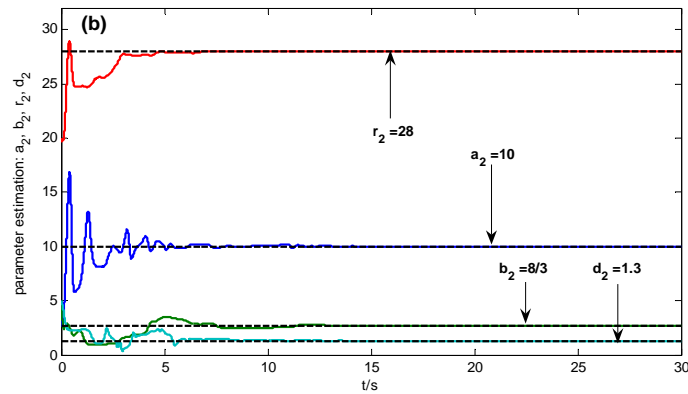


图 2-3 未知参数估计的时间演化（黑色虚线表示各个未知参数的真实值）

(a) 驱动系统的未知参数 a_1, b_1, c_1 的估计值; (b) 响应系统中的参数 a_2, b_2, r_2, d_2 的估计值

从图 2-1 中可看出，响应状态与驱动状态的函数随着时间推移逐渐趋于一致；图 2-2 描述了同步误差的时间曲线，同步误差在较短时间内也趋于零；从图 2-3 可看出，驱动系统与响应系统中的所有未知参数均被成功辨识到各自的真实值，可见通过该方法实现了两个不同维数动力系统（三维混沌系统与四维超混沌系统）之间的 MFPS 同步及未知参数的辨识。

注 2.5 若采用一些文献[60-61]中提出的降维同步方案，使得驱动变量 x_1, x_2, x_3 与响应变量实现部分同步，此时式(2-24)与式(2-25)更改为

$$\dot{\hat{\Phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{a}}_1 \\ \dot{\hat{b}}_1 \\ \dot{\hat{c}}_1 \end{bmatrix} = -\mathbf{G}_1^T(\mathbf{x})\Delta(t)\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\Delta_1(t)x_3e_1 \\ -\Delta_2(t)x_1^2e_2 \\ \Delta_3(t)x_1e_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\hat{\Theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{a}}_2 \\ \dot{\hat{r}}_2 \\ \dot{\hat{b}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{2p}^T(\mathbf{y})\mathbf{e} = \begin{bmatrix} (y_2 - y_1)e_1 \\ y_1e_2 \\ -y_3e_3 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

其中， \mathbf{G}_{2p} 是 \mathbf{G}_2 的部分函数矩阵，则在部分变量 MFPS 同步的过程中不能实现所有未知参数的辨识。在本章提出的方案中，通过构建由系统变量组成的函数作为辅助系统变量，可实现所有变量的同步以及所有未知参数的辨识。

2.5 本章小结

本章提出了针对同结构以及异结构（包括不同维数）之间动力系统的 MFPS 形式的同步以及参数辨识的控制器设计，基于严格的理论证明和分析，给出了保证参数成功辨识的线性独立条件，从而修正了文献[65]中不确切的理论结果。通过数值例子，验证了该方案的有效性。另外，本章的控制器设计可直接应用于同结构或异结构间动力系统的投影同步、反同步或完全同步等各种同步形式的控制器设计中。

3 一种同步整数阶与分数阶混沌系统的通用方法

3.1 引言

目前文献中所研究的同步行为或者同步方案，很多都是局限于整数阶系统之间的同步（如文献[17-19,51-52,54-55,60-62,65]）或者分数阶系统之间的同步（如文献[32-33,66]）。一个有趣的问题是，整数阶动力系统与分数阶动力系统之间能否实现同步？Zhou 等^[67]最早研究了这个问题，在文献[67]中根据追踪控制的思想给出了一种可行的方案，并实现了分数阶 Lorenz 系统与整数阶 Chen 系统之间的同步；Odibat Z.M. 在文献[68]中研究了整数阶 Chen 系统与分数阶 Chen 系统的同步，以及整数阶 Rössler 系统与分数阶 Rössler 系统之间的同步。然而在文献[68]中，所研究的系统有着相同的结构，并且作者并未提出对于这类问题的通用方法。另外，在混沌系统同步的研究范畴中，整数阶系统与分数阶系统的同步问题作为一个新的话题，并未有很多文献涉及这一方面。在本章中，我们将提出一种新的且可行的通用方法，实现不同结构的整数阶与分数阶混沌系统之间的同步。

3.2 分数阶微积分的定义及基本性质

分数阶微积分有着漫长的历史，在发展过程中人们提出了多种定义，其中应用最广泛的定义有 Riemann-Liouville (RL) 定义及 Caputo 定义^[69]。

RL 分数阶微分方程的定义可描述为

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (3-1)$$

其中 $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数。

RL 定义在实际应用中不太方便，因其涉及到物理意义不明确的非整数阶的初值问题，故人们倾向于使用如下的 Caputo 定义，

$${}_a^* D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (3-2)$$

类似的， $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ 。在下文中，均使用 Caputo 定义来描述分数阶的动力系统，其中积分下界设为 $t_0 = 0$ ，并使用简化的符号 D^α 来代替 ${}_0^* D_t^\alpha$ ($t > 0$)。

本章的分析和证明所用到的分数阶微积分运算性质如下^[69]：

性质 3.1 当 $\alpha = n$ (n 是整数)， $D^\alpha f(t)$ 与整数阶微积分所得结果相同。特别地，当 $\alpha = 1$ 时， $D^\alpha f(t)$ 即通常的一阶微分

$$D^1 f(t) = df(t) / dt \quad (3-3)$$

性质 3.2 当 $\alpha = 0$ 时, $D^\alpha f(t)$ 相当于恒等算子, 即

$$D^0 f(t) = f(t) \quad (3-4)$$

性质 3.3 分数阶微积分算子满足线性可加性

$$D^\alpha [af(t) + bg(t)] = aD^\alpha f(t) + bD^\alpha g(t) \quad (3-5)$$

性质 3.4 当 $\alpha \geq 0$ 时, 下式成立

$$D^\alpha D^{-\alpha} f(t) = D^0 f(t) = f(t) \quad (3-6)$$

即分数阶微分算子是分数阶同阶 α 积分算子的左逆。

性质 3.5 Caputo 分数阶微分算子的 Laplace 变换为

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), (\alpha > 0, n-1 < \alpha \leq n) \quad (3-7)$$

特别地, 当 $\alpha \in (0, 1]$ 时, 有 $L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0)$ 。分数阶积分算子的 Laplace 变换为

$$L\{D^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} L\{f(t)\} = s^{-\alpha} F(s), (\alpha > 0) \quad (3-8)$$

3.3 问题描述与同步方案

考虑如下的整数阶混沌系统 (驱动系统) 与分数阶混沌系统 (响应系统)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (3-9)$$

$$D^\alpha \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) + \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3-10)$$

其中, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ 分别是驱动系统与响应系统之间的状态变量, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n \times 1$ 的向量, 即 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ 分别表示响应系统各变量演化方程的阶次, $\mathbf{F}, \mathbf{G}: R^n \rightarrow R^n$ 是驱动系统与响应系统的非线性函数部分。 $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是控制器。定义同步误差为 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, 若当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, 则称整数阶的混沌系统与分数阶的混沌系统之间达到了同步。

注 3.1 当分数阶的阶数满足 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ 时, 分数阶系统称为平衡阶分数阶系统 (commensurate order system), 否则称之为非平衡阶系统 (incommensurate order system)。

注 3.2 当 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 及 $\mathbf{F}(\bullet) = \mathbf{G}(\bullet)$ 时, 则本章分析的情况退化为同一个动力系统的整数阶与分数阶之间的同步, 类似的工作可见文献[68], 作者设计了同步控制器实现了整数阶 Chen 系统与分数阶 Chen 系统之间的同步。在本章中, 将提出一种通用方法, 实现不同阶数以及不同结构的动力系统之间的同步, 从而推广现有文献的结果。

将控制器 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 分解为两个部分, 即 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 。子控制器 $U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 设计如下

$$U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (D^{-(1-\alpha)} - 1)[g(\mathbf{y})] \quad (3-11)$$

将上式代入(3-10), 可将响应系统重写如下

$$D^\alpha \mathbf{y} = D^{-(1-\alpha)} g(\mathbf{y}) + U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3-12)$$

对于上式的左右两边同时应用 Laplace 变换, 同时令 $\mathbf{Y}(s) = L\{\mathbf{y}(t)\}$, 可得

$$s^\alpha \mathbf{Y}(s) - s^{\alpha-1} \mathbf{y}(0) = s^{-(1-\alpha)} L\{g(\mathbf{y})\} + L\{U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \quad (3-13)$$

在上式左右同乘算子 $s^{1-\alpha}$, 同时应用 Laplace 逆变换, 可得如下的等同响应系统

$$D^1 \mathbf{y} = g(\mathbf{y}) + D^{1-\alpha} [U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \quad (3-14)$$

通过代入子控制器 $U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 将整数阶与分数阶之间的动力系统的同步问题转换为常规的整数阶之间的同步问题。在现有文献中, 整数阶的动力系统同步问题有很多成熟的方法。在本章中, 设计如下的非线性控制器 $U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D^{-(1-\alpha)} [(A - B)\mathbf{x} - G(\mathbf{y}) + F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e}] \quad (3-15)$$

其中 $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ 为控制增益矩阵。我们有如下的命题。

命题 3.1 对于给定的整数阶动力系统(3-9)与分数阶动力系统(3-10), 采用设计的控制器 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (即式(3-11)与式(3-15)), 并选取合适的控制增益矩阵 \mathbf{K} , 可使两个系统(3-9)与(3-10)达到同步。

证明 因系统(3-14)是(3-10)的等同系统, 代入式(3-15)可得如下形式的响应系统

$$D^1 \mathbf{y} = B\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) + D^{1-\alpha} D^{-(1-\alpha)} [(A - B)\mathbf{x} - G(\mathbf{y}) + F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e}] \quad (3-16)$$

应用分数阶微积分的运算性质, 同步误差系统有如下形式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{x}} = D^1 \mathbf{y} - \dot{\mathbf{x}} \\ &= B\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) - [A\mathbf{x} + F(\mathbf{x})] + [(A - B)\mathbf{x} - G(\mathbf{y}) + F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e}] \\ &= (B - K)\mathbf{e} \end{aligned} \quad (3-17)$$

对于常规线性误差系统(3-17), 总可选取合适的控制参数 \mathbf{K} , 使得矩阵 $(B - K)$ 的所有特征值 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 均含有稳定的负特征值, 从而保证误差系统(3-17)是渐进稳定的。因此, 通过本节提出的控制器设计方法, 可使得整数阶与分数阶系统之间达到

同步。

3.4 数值例子：整数阶与分数阶 Lorenz 系统之间的同步

令整数阶的 Lorenz 系统作为驱动系统，描述如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - 8x_3/3 \end{cases} \quad (3-18)$$

分数阶 Lorenz 系统作为响应系统

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = 10(y_2 - y_1) + u_1 \\ D^\alpha y_2 = 28y_1 - y_1y_3 - y_2 + u_2 \\ D^\alpha y_3 = y_1y_2 - 8y_3/3 + u_3 \end{cases} \quad (3-19)$$

根据文献^[31]中的结论，当系统(3-19)的阶次取为 $\alpha = 0.99$ 时，分数阶 Lorenz 系统有典型混沌吸引子。

应用 3.3 节提出的方法，设计简化和合并的控制器 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 如下

$$\begin{cases} u_1 = (D^{-0.01} - 1)[10(y_2 - y_1)] + D^{-0.01}(-\mathbf{k}_1\mathbf{e}) \\ u_2 = (D^{-0.01} - 1)(28y_1 - y_2) + y_1y_3 + D^{-0.01}(-x_1x_3 - \mathbf{k}_2\mathbf{e}) \\ u_3 = (D^{-0.01} - 1)(-8y_3/3) - y_1y_2 + D^{-0.01}(x_1x_2 - \mathbf{k}_3\mathbf{e}) \end{cases} \quad (3-20)$$

其中，

$$\begin{cases} \mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]^T = [y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3]^T \\ \mathbf{k}_i = [k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}] \quad (i=1, 2, 3) \\ \mathbf{K} = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3]^T \end{cases} \quad (3-21)$$

则误差系统可描述如下

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} -10 - k_{11} & 10 - k_{12} & -k_{13} \\ 28 - k_{21} & -1 - k_{22} & -k_{23} \\ -k_{31} & -k_{32} & -8/3 - k_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

选取控制增益矩阵 $\mathbf{K} = \text{diag}(15, 15, 15)$ ，则矩阵 $(\mathbf{B} - \mathbf{K})$ 的特征值分别为 $\lambda_1 = -37.8277$ ， $\lambda_2 = -17.6667$ ， $\lambda_3 = -3.1723$ ，均满足 $\lambda_i (i=1, 2, 3) < 0$ ，即误差系统(3-22)将趋于稳定，对于整数阶系统(3-18)与分数阶系统(3-19)将实现同步。

在数值仿真中，设定驱动系统和响应系统的初值分别为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (3, 4, 5)^T$ 及 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T = (-6, -10, 13.5)^T$ 。从图 3-1 与图 3-2 可看出，驱动变量与响应变量的演化曲线趋于一致，且同步误差亦在 1.5s 左右收敛到 0，即实现了整数阶与分数阶动力系统之间的同步。

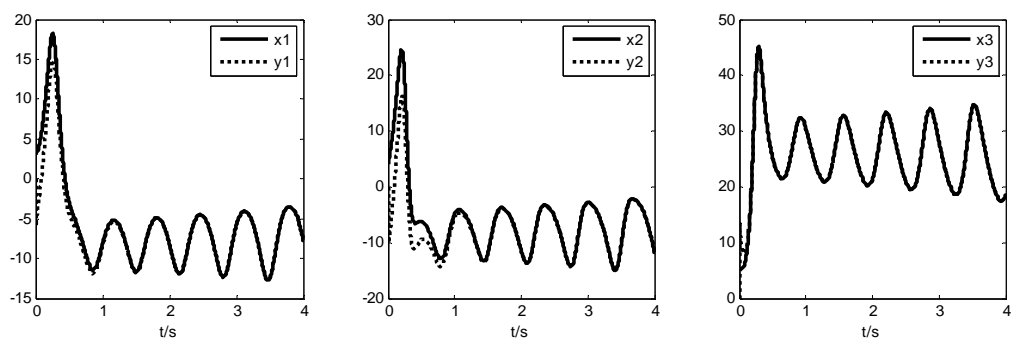


图 3-1 整数阶驱动系统(3-18)与分数阶响应系统(3-19)的状态演化过程

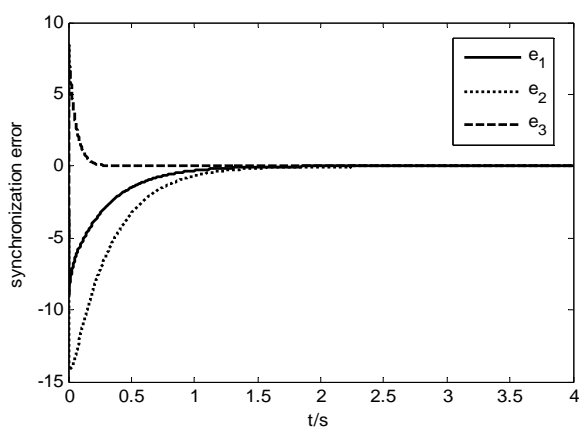


图 3-2 同步误差的时间曲线

3.5 本章小结

在本章中我们研究了整数阶混沌系统与分数阶混沌系统之间的同步问题，并给出了一种通用的控制器设计方案。根据所提出的方法，实现了整数阶与分数阶 Lorenz 系统之间的同步。数值仿真验证了理论结果的有效性。

4 不同阶次分数阶动力系统的投影同步

4.1 引言

在现有的关于分数阶动力系统同步的文献中，大部分都局限于同结构的系统之间来研究（如文献[33,70-72]）；随后人们逐渐将同步的范围推广到不同结构的分数阶系统之间，如文献[73]利用主动控制法实现了分数阶 Lorenz 系统与分数阶 Liu 系统等异结构系统之间的同步，而文献[74]运用非线性控制器以及极点配置技术实现了分数阶超混沌 Lorenz 系统与分数阶超混沌 Chen 系统之间的延迟投影同步。对于不同阶次的分数阶动力系统的同步问题，已有研究者开始关注，但只有最近的少数几篇文献有所涉及。文献[75]讨论了不同阶次的分数阶 Lorenz 系统以及不同阶次的分数阶 Chen 系统的同步，然而其控制器的设计方法稍显复杂；另一篇最近的文章[68]则研究了不同阶次的分数阶 Chen 系统以及不同阶次的分数阶 Rössler 系统的同步，然而作者只针对这两个特定系统做了同步研究，并未给出设计控制器的通用步骤。另外，在这两篇文献中，所涉及的分数阶动力系统的结构都是相同的，仅阶次不一致。在本章中，基于分数阶线性系统的稳定性理论以及分数阶微积分的运算性质，我们将给出一种通用有效的方法，使得不同结构以及不同阶次的分数阶系统的同步成为可能。

不同阶次分数阶系统的同步研究仍有着重要的意义。比如在这种同步框架下，分数阶的阶次也是一个参数，可以与投影系数一起用来作为保密通信的密钥。另外，研究分数阶系统在不同阶次下的同步，推广并丰富了以往关于动力系统同步的研究内容。

本章的内容可看成是上一章研究工作的延续，已经发表在 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 杂志的 2012 年第 4 期上，更详细的研究背景以及更多的应用例子可见^[76]。

4.2 分数阶微积分相关知识

4.2.1 分数阶微积分运算的基本性质

分数阶微积分的定义在上一章中有所述及。在本章中，我们仍沿用 Caputo 定义，同时仍采用简化的符号 D^α 来代替 ${}_0^C D_t^\alpha (t > 0)$ 。另外，根据文献[77]的建议，对于分数阶积分算子，我们采用符号 $D^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) 描述。本小节将列举部分分数阶微积分的基本运算性质，详细的证明和分析过程可见文献[69,77]。部分性质在上一章中有所涉及，为保持本章内容完整，我们仍将一些性质列写如下。

性质 4.1 当 $\alpha = n$ (n 是整数)， $D^\alpha f(t)$ 与整数阶微积分所得结果相同。特别地，当 $\alpha = 1$ 时， $D^\alpha f(t)$ 即通常的一阶微分

$$D^1 f(t) = df(t) / dt \quad (4-1)$$

性质 4.2 当 $\alpha = 0$ 时, $D^\alpha f(t)$ 相当于恒等算子, 即

$$D^0 f(t) = f(t) \quad (4-2)$$

性质 4.3 分数阶微积分算子满足线性可加性

$$D^\alpha [af(t) + bg(t)] = aD^\alpha f(t) + bD^\alpha g(t) \quad (4-3)$$

性质 4.4 当 $\alpha \geq 0$ 时, 下式成立

$$D^\alpha D^{-\alpha} f(t) = D^0 f(t) = f(t) \quad (4-4)$$

即分数阶微分算子是分数阶同阶 α 积分算子的左逆。

性质 4.5 设函数 f 在 $[0, t]$ 上有 k 阶的连续微分 ($k \in \mathbb{N}, t > 0$), 令 $\alpha, \beta > 0$ 并存在整数 $\ell \in \mathbb{N}$ 且 $\ell \leq k$ 以及 $\alpha, \alpha + \beta \in [\ell - 1, \ell]$, 则

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha + \beta} f \quad (4-5)$$

注意上述性质中对常数 ℓ 的限制是很必要的。在本章中, 我们只考虑 $\alpha, \beta \in (0, 1]$ 且 $\alpha + \beta \in (0, 1]$ 的情形。明显地, 在这种情形下, **性质 4.5** 成立。

4.2.2 分数阶线性系统的稳定性

本节给出关于分数阶线性系统的两个很重要的稳定性理论。详细内容可见文献 [26, 78]。

考虑如下的分数阶线性系统

$$D^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4-6)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n]^T$ ($0 < \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$) 表示系统各状态变量方程的阶次。

定理 4.1 (见 [26]) 当系统变量的阶次相等, 即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ 时, 分数阶线性系统 (4-6) 是稳定的, 当且仅当 $|\arg(\text{spec}(\mathbf{A}))| > \alpha\pi/2$ 。另外, 若 $\alpha = 1$, 上述稳定性理论与常规整数阶线性系统的稳定性结论是一致的。

定理 4.2 (见 [78]) 假设 α_i 为取值在 0 到 1 之间的任意值, 且不互相相等; 令 M 为 α_i 的分母 u_i 的最小公倍数, 即 $\alpha_i = v_i / u_i$, $(u_i, v_i) = 1$, $u_i, v_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$; 则系统 (4-6) 是渐进稳定的, 当且仅当下式的所有特征值 λ

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - \mathbf{A}) = 0 \quad (4-7)$$

满足 $|\arg(\lambda)| > \pi/2M$ 。

4.3 问题描述与同步方案

考虑如下的驱动系统与响应系统

$$D^\alpha \mathbf{x} = f(\mathbf{x}) \quad (4-8)$$

$$D^\beta \mathbf{y} = g(\mathbf{y}) + U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4-9)$$

其中, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ 分别是驱动变量与响应变量, $f: R^n \rightarrow R^n$ 和 $g: R^n \rightarrow R^n$ 分别是描述驱动系统与响应系统的连续可微函数向量, α, β 是 $n \times 1$ 维的阶次常数向量, 描述驱动变量与响应变量的分数阶阶次, 即 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$, $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$, $\alpha_i, \beta_i \in (0, 1]$ 。本章中讨论的问题局限于 $0 < \beta_i \leq \alpha_i \leq 1$ 。 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是待设计的控制器。

将驱动系统与响应系统按线性部分与非线性部分分解为

$$D^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + F(\mathbf{x}) \quad (4-10)$$

$$D^\beta \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) + U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4-11)$$

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in R^{n \times n}$ 是线性部分的参数向量, $F: R^n \rightarrow R^n$ 与 $G: R^n \rightarrow R^n$ 是非线性部分的函数向量。

根据投影同步的定义, 同步误差为

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \chi \mathbf{x} \quad (4-12)$$

其中 χ 称为同步比例系数 (scaling factor)。若存在非零常数 $\chi (\chi \neq 0)$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \chi \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad (4-13)$$

对于任意的初值 $\mathbf{x}(0)$ 和 $\mathbf{y}(0)$ 均成立, 则称不同阶次的分数阶系统(4-10)与(4-11)达到了投影同步。

按照上一章的策略, 仍将控制函数项分解为两部分, 即 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 并且通过设计子控制器 $U_I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 将问题转化为通常的同阶次分数阶系统的同步问题。设计 $U_I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 如下

$$U_I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (D^{-(\alpha-\beta)} - I)[g(\mathbf{y})] \quad (4-14)$$

其中 I 为恒等算子。将控制器 $U_I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 代入响应系统中, 可得

$$D^\beta \mathbf{y} = D^{-(\alpha-\beta)} g(\mathbf{y}) + U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4-15)$$

对上式左右两边同时做 $\alpha - \beta$ 阶次的分数阶微分, 并且运用分数阶微积分的性质 4.4, 可得

$$\begin{aligned} D^{(\alpha-\beta)}[D^\beta \mathbf{y}] &= D^\alpha \mathbf{y} \\ &= D^{(\alpha-\beta)}[D^{-(\alpha-\beta)} g(\mathbf{y}) + U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ &= g(\mathbf{y}) + D^{(\alpha-\beta)}[U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \end{aligned} \quad (4-16)$$

注意到 $\alpha_i - \beta_i$ 满足 $\alpha_i - \beta_i \in [0,1)$ ，根据性质 4.4 与 4.5，上式成立，即通过设计控制器 $U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，将问题转化为同阶次的分数阶动力系统的同步问题。

设计如下的非线性控制项 $U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D^{-(\alpha-\beta)}[\chi(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x} - G(\mathbf{y}) + \chi F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e}] \quad (4-17)$$

其中 $\mathbf{K} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in R^{n \times n}$ 是控制增益矩阵， $\mathbf{k}_i = [k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in}]$ 是针对各个状态变量的控制增益向量。

将上述控制器项代入响应系统中，可得

$$D^\alpha \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) + D^{(\alpha-\beta)} D^{-(\alpha-\beta)}[\chi(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x} - G(\mathbf{y}) + \chi F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e}] \quad (4-18)$$

则同步误差系统为

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{e} &= D^\alpha(\mathbf{y} - \chi\mathbf{x}) = D^\alpha \mathbf{y} - D^\alpha(\chi\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{B}\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) - \chi[\mathbf{A}\mathbf{x} + F(\mathbf{x})] + [\chi(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x} - G(\mathbf{y}) + \chi F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e}] \\ &= (\mathbf{B} - \mathbf{K})\mathbf{e} \end{aligned} \quad (4-19)$$

对于线性分数阶系统(4-19)，总可选取合适的控制矩阵 \mathbf{K} 使得 $(\mathbf{B} - \mathbf{K})$ 矩阵的特征值 $\lambda_i (i=1,2,\dots,n)$ 满足定理 4.1 的稳定条件，或者方程 $\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - (\mathbf{B} - \mathbf{K})) = 0$ 的所有根满足定理 4.2 的稳定条件，即保证同步误差系统收敛于零。

注 4.1 在上述的分析过程中用到了分数阶微积分的性质 $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$ 。然而这个等式并不对于任何常数值 α 、 β 都成立。在本章中我们只讨论 $0 < \beta_i \leq \alpha_i \leq 1$ 的同步问题，即响应系统的状态变量的阶次小于或等于驱动系统相应状态变量的阶次。

注 4.2 注意到控制器项 $U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 与 $U_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 有些部分是重复的，可将两部分合并，得到较为简化的控制函数 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 如下

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (D^{-(\alpha-\beta)} - I)[\mathbf{B}\mathbf{y}] - G(\mathbf{y}) + D^{-(\alpha-\beta)}[\chi(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x} + \chi F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e}] \quad (4-20)$$

注 4.3 若假设 $\alpha_i = 1$ ，并令投影系数 χ 为 1，则本章讨论的同步问题退化为整数阶系统与分数阶系统之间的完全同步问题，这在上一章中已经述及。本章的内容和结论可看做是上一章的延伸和推广。

注 4.4 进一步考虑 $\alpha_i = \beta_i \in (0,1]$ ，则本章中讨论的问题退化为同阶次的分数阶动力系统之间的同步问题，控制器项退化为

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x} - G(\mathbf{y}) + \chi F(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{e} \quad (4-21)$$

事实上，这是在很多文献中都采用的控制器函数，如文献[52,73,79]等。在本章中，针对一个更为一般的同步问题，我们给出了一个更为通用的控制器函数设计方式。

4.4 应用与数值仿真

在最近的一篇文章^[80]中，作者设计控制器实现了四维分数阶超混沌Lü系统与Chen系统之间的同步，然而其中的阶次均限定在相等的情形。根据本章中提出的方案，我们将设计控制器实现不同阶次的这两个分数阶超混沌系统之间的投影同步。

作为驱动系统的分数阶超混沌Lü系统与作为响应系统的分数阶超混沌Chen系统分别描述如下

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1 = a_1(x_2 - x_1) + x_4 \\ D^{\alpha_2} x_2 = -x_1 x_3 + c_1 x_2 \\ D^{\alpha_3} x_3 = x_1 x_2 - b_1 x_3 \\ D^{\alpha_4} x_4 = x_1 x_3 + d_1 x_4 \end{cases} \quad (4-22)$$

$$\begin{cases} D^{\beta_1} y_1 = a_2(y_2 - y_1) + y_4 + u_1 \\ D^{\beta_2} y_2 = d_2 y_1 - y_1 y_3 + c_2 y_2 + u_2 \\ D^{\beta_3} y_3 = y_1 y_2 - b_2 y_3 + u_3 \\ D^{\beta_4} y_4 = y_2 y_3 + r_2 y_4 + u_4 \end{cases} \quad (4-23)$$

对于上述的两个系统，参数分别选取为 $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (36, 3, 20, 1.3)$ 以及 $(a_2, b_2, c_2, d_2, r_2) = (35, 3, 12, 7, 0.5)$ ，对于不平衡阶次的分数阶Lü系统，阶次选取为 $\alpha = (0.99, 0.98, 0.97, 0.96)^T$ ，而对于平衡阶次的分数阶Chen系统，阶次选取为 $\beta_{i=1 \sim 4} = 0.96$ ，都能展现超混沌吸引子。

设计控制器函数如下

$$\begin{cases} u_1 = (D^{-0.03} - I)[35(y_2 - y_1) + y_4] + D^{-0.03}[\chi(x_2 - x_1) - k_1 e] \\ u_2 = (D^{-0.02} - I)[7y_1 + 12y_2] + y_1 y_3 + D^{-0.02}[\chi(-7x_1 + 8x_2) - \chi x_1 x_3 - k_2 e] \\ u_3 = (D^{-0.01} - I)[-3y_3] + y_1 y_2 + D^{-0.01}[\chi x_1 x_2 - k_3 e] \\ u_4 = 0.8\chi x_4 - y_2 y_3 + \chi x_1 x_3 - k_4 e \end{cases} \quad (4-24)$$

选取控制增益为 $k_{14} = 1, k_{22} = 20, k_{44} = 5$ 并令控制矩阵 \mathbf{K} 中的其他值均为0，可得误差系统为

$$\begin{cases} D^{0.99} e_1 = -35e_1 + 35e_2 + (1 - k_{14})e_4 = -35e_1 + 35e_2 \\ D^{0.98} e_2 = 7e_1 + (12 - k_{22})e_2 = 7e_1 - 8e_2 \\ D^{0.97} e_3 = -3e_3 \\ D^{0.96} e_4 = (0.5 - k_{44})e_4 = -4.5e_4 \end{cases} \quad (4-25)$$

代入特征方程 $\det(\text{diag}(\lambda^{\alpha_1}, \lambda^{\alpha_2}, \lambda^{\alpha_3}, \lambda^{\alpha_4}) - (\mathbf{B} - \mathbf{K})) = 0$ ，可改写为

$$[(\lambda^{r_1} + 35)(\lambda^{r_2} + 8) - 35 \times 7](\lambda^{r_3} + 3)(\lambda^{r_4} + 4.5) = 0 \quad (4-26)$$

其中 $r_i = M\alpha_i (i=1,2,3,4)$ 且 $M=100$ ，求解上述方程，可得

$$\lambda^{99} = -42.17, \lambda^{98} = -0.83, \lambda^{97} = -3, \lambda^{96} = -4.5 \quad (4-27)$$

很明显，特征方程的所有根均在稳定区域内 $|\arg(\lambda)| > \pi / (2M) = \pi / 200 = 0.0157$ （注意到 $(\min\{|\arg(\lambda_i)|\}) = 0.0317 > 0.0157$ ），根据稳定性理论4.2，可知误差系统将收敛到0，即两个不同阶次且不同结构的分数阶超混沌系统将达到投影同步。

在数值仿真中，设置驱动变量的初值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^T = (3, -4, 5, -6)^T$ ，响应变量的初值为 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0))^T = (10, -10, 10, -10)^T$ ，投影系数 χ 为 -2 。

数值计算的图形见图 4-1~4-3。驱动变量与响应变量的时间状态演化见图 4-1，同步误差的时间演化见图 4-2，可知同步误差渐进稳定，驱动系统与响应系统逐渐达到了投影同步。从图 4-3 中可看出，响应系统的三维奇怪吸引子呈现出与驱动系统的奇怪吸引子严格一致然而比例缩放的结构。从理论分析和数值仿真中，可知不同阶次且不同结构的两个超混沌分数阶系统达到了投影同步。

4.5 相关同步方法的比较与分析

最近，关于不同阶次动力系统之间的同步问题吸引了部分研究者的注意。从文献[67-68,75,81]中可看出，对于这种情形下的同步，控制器的设计将要复杂一些。在本小节中我们将回顾并讨论现有文献所报导的关于不同阶次动力系统的同步方案。

Zhou的方法^[67,75]是基于追踪控制的思想，借助分数阶系统的稳定性理论设计的。类似的，控制器 $u(y, x)$ 仍分解为两部分

$$u(y, x) = \theta(x) + \tau(y, x) \quad (4-28)$$

其中 $\theta(x)$ 一项是补偿控制器， $\tau(y, x)$ 是反馈控制项，为使响应系统的输出信号 $y(t)$ 能够追踪参考信号 $x(t)$ ，子控制器 $\theta(x)$ 设计为 $\theta(x) = D^\beta x - g(x)$ ，而另一项子控制器 $\tau(y, x)$ 则根据误差系统的稳定性来设计。这种方法已被运用于分数阶Lorenz系统与整数阶Lorenz系统等情形下的同步。然而，其控制器设计以及控制器形式仍稍显复杂。

近期的一篇文章^[81]提出了另一种方案，其基本思想是运用 Lyapunov 稳定性理论设计控制器，并运用数值微分来获得 \dot{x} 。这种方法比文献[67,75]的方法要简易一些，然而其控制增益需很大；而且即使在很大的控制增益下，同步误差仍不能保证收敛到0。

在最近的另一篇文章中，Odibat Z.M.^[68]运用分数阶动力系统的稳定性定理，设计了合适的控制器，分别实现了两个三维同结构但异阶次的混沌系统之间的同步。这种方法避免了文献[67,75]的复杂形式，亦避免了文献[81]中同步方法的高增益控制缺陷。然而该文中并没有给出通用控制器的设计形式。本章中的方法可看做文献[68]中的方法的推广。事实上，考虑如下的设定：

- ◆ 假定驱动系统与响应系统是同结构的，即 $A = B$ 且 $F(\bullet) = G(\bullet)$ ；

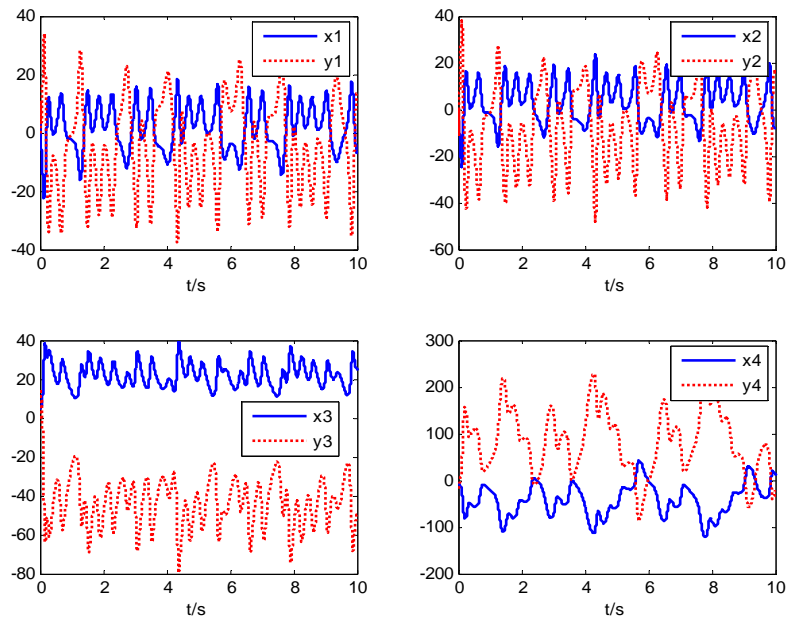


图 4-1 非平衡阶次的分数阶 Lü 系统与平衡阶次的分数阶 Chen 系统之间的状态变量演化

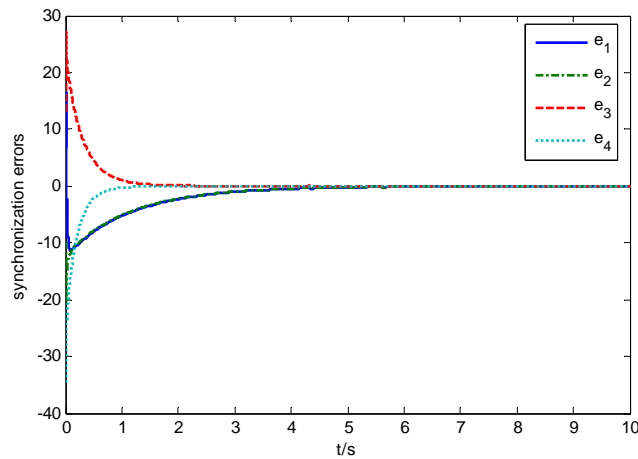
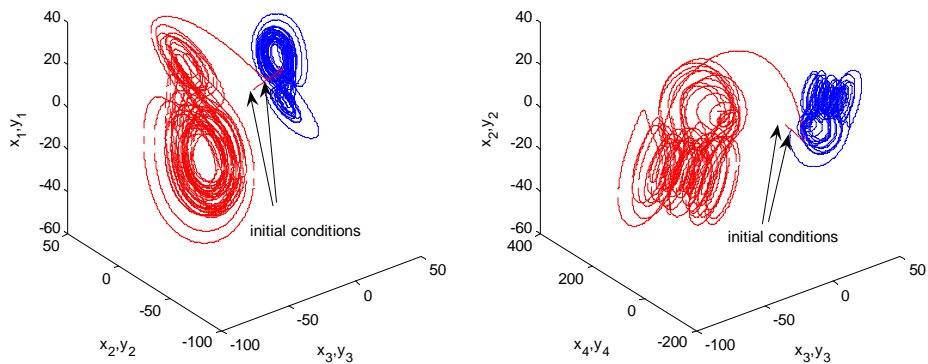


图 4-2 投影同步误差的时间曲线



(a) $x_1 - x_2 - x_3$ ($y_1 - y_2 - y_3$) 空间; (b) $x_2 - x_4 - x_3$ ($y_2 - y_4 - y_3$) 空间

图 4-3 驱动系统与受控响应系统的三维吸引子图

- ◆ 投影系数 χ 设为1, 即投影同步退化为完全同步;
- ◆ 控制增益矩阵 \mathbf{K} 设为对角矩阵形式, 即 $\mathbf{K} = \text{diag}(k_{11}, k_{22}, \dots, k_{mm})$.

则本章中的控制器形式退化为

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (D^{-(\alpha-\beta)} - I)[\mathbf{B}\mathbf{y}] - G(\mathbf{y}) + D^{-(\alpha-\beta)}[G(\mathbf{x})] - \mathbf{K}D^{-(\alpha-\beta)}[\mathbf{y} - \mathbf{x}] \quad (4-29)$$

文献[68]中给出的具体控制项 (如该文中所设计的控制器方程(17)、(23)、(29)等) 可从上式中直接导出。然而上式(4-29)并未在文献[68]中给出。

4.6 本章小结

本章讨论了不同阶次的分数阶动力系统的投影同步问题。通过设计子控制器将问题转化为通常的同阶次的异结构分数阶动力系统的同步, 然后设计非线性反馈控制器保证误差系统的收敛。基于分数阶线性系统的稳定性定理, 给出了严密的分析推导。将理论结果运用于四维分数阶超混沌 Lü 系统与分数阶超混沌 Chen 系统之间的同步, 通过数值仿真验证了控制器设计的有效性。最后, 我们回顾了最近文献中关于这个话题的几种同步方案, 并比较了各自的特点和优缺点。本章的结论说明, 通过设计合适的控制项, 不同阶次且不同结构的分数阶系统之间仍能达到投影同步。

5 分数阶复杂网络的参数估计与拓扑辨识

5.1 引言与背景

将动力系统的阶次从常规整数阶扩展至分数阶时，系统的动力学或者状态演化会呈现出与整数阶不一样的特性。最近，许多研究者开始探讨多个分数阶动力系统相互耦合所呈现的集群现象，或者研究如何设计控制器使分数阶复杂网络达到同步。例如，文献[39]讨论了分数阶复杂网络的牵引控制问题，发现相对于整数阶网络而言，分数阶网络更容易达到平衡点或者同步状态；文献[82]则研究了两个分数阶复杂网络之间的鲁棒外部同步问题，当网络因扰动而导致结构不一致时，给出了一组线性矩阵不等式来保证鲁棒同步；文献[83]研究了含不同节点的加权分数阶网络的广义同步，并讨论了分数阶阶次和控制增益对同步过程的影响。

在这些研究中，均假设分数阶网络的拓扑事先已知；然而在有些实际情况中，网络的拓扑是未知的或者不确定的。分数阶的网络拓扑直接影响着网络功能的实现；因此如何辨识分数阶复杂网络的拓扑，成为分数阶复杂网络研究的一个基本问题，然而目前尚无文献涉及这一方面。在本章中，我们将运用自适应同步的方法，提出一种可行方案来估计和辨识分数阶网络的未知参数和拓扑。

5.2 分数阶系统的稳定性

考虑如下的分数阶动力系统

$$D^q X = f(X) \text{ 或 } D^q X = AX \quad (5-1)$$

其中 $X \in R^n (n \in N)$, $A \in R^{n \times n}$, $0 < q \leq 1$.

引理 5.1 (见^[26]) 对于线性分数阶动力系统(5-1)，若 A 是一个常数矩阵，则自治线性分数阶系统(5-1)是渐进稳定的，当且仅当 $|\arg(\lambda_i(A))| > q\pi/2$ 。

引理 5.2 (见^[84]) 对于时变线性系统(5-1)，若时变参数矩阵 A 满足 Lyapunov 函数 (即存在对称正定矩阵 P 和半正定矩阵 Q ，使得方程 $A^T P + PA = -Q$ 对于所有的状态变量 $X(t)$ 均成立)，则系统(5-1)是渐进稳定的。

上述引理 2 可用来判别线性时变分数阶系统 $D^q X = A(X)X$ 的渐进稳定性或者分数阶非线性系统 $D^q X = f(X)$ 的局部稳定性。对于非线性系统 $D^q X = f(X)$ 而言，矩阵 A 可通过平衡点 X_w 附近计算 $A = \partial f / \partial X|_{X=X_w}$ 来获得。

引理 5.3 (见^[85]) 对于非线性分数阶系统 (5-1) 且其阶次 $0 < q \leq 1$ ，若存在实对称正定矩

阵 P ，使得函数 $J = X^T P D^q X \leq 0$ 对任意的 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ 都成立，则系统 (5-1) 渐进稳定。

上述引理的详细证明和分析可见文献^[26,84-85]。

5.3 基于自适应同步的辨识方案

考虑如下的分数阶复杂网络

$$D^q \mathbf{x}_i = f_i(\mathbf{x}_i) + F_i(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} h_j(\mathbf{x}_j) \quad (5-2)$$

其中， N 为网络的节点数， $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})^T$ 表示第 i 个节点的状态变量， $\boldsymbol{\alpha}_i \in R^{m_i}$ 第 i 个节点的动力系统的未知参数， $i=1, 2, \dots, N$ ， m_i 是未知参数的个数， q 表示 i 节点动力方程的微分阶次， $f_i(\mathbf{x}_i)$ 是 $n \times 1$ 维的函数向量， $F_i(\mathbf{x}_i)$ 是 $n \times m_i$ 维的函数矩阵。对于网络结构， $h_j(\mathbf{x}_j): R^n \rightarrow R^n$ 指节点 j 的输出函数或耦合函数， Γ 是已知的且可调整的不同节点之间的内耦合强度， $C = (c_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$ 表示未知的耦合拓扑矩阵：若节点 i 与节点 j ($i \neq j$) 有边连接，则 $c_{ij} \neq 0$ 且 c_{ij} 是权重值；否则 $c_{ij} = 0$ 。

注 5.1 在本章中，我们不假定耦合拓扑矩阵 C 是对称的或者是耗散的，同时 $h_j(\mathbf{x}_j)$ 可以是线性函数也可以是非线性函数。总而言之，在本章中我们考虑一个相当一般的分数阶复杂网络。

在给出理论结果之前，我们引入如下假设。

假设 5.1 假设存在非负常数 L_i^f ，使得下式成立

$$\|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})\| \leq L_i^f \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, i=1, 2, \dots, N \quad (5-3)$$

假设 5.2 假设存在非负常数 L_i^F ，使得下式成立

$$\|F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})\| \leq L_i^F \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, i=1, 2, \dots, N \quad (5-4)$$

假设 5.3 假设存在非负常数 L_j^h ，使得下式成立

$$\|h_j(\mathbf{x}) - h_j(\mathbf{y})\| \leq L_j^h \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, j=1, 2, \dots, N \quad (5-5)$$

注 5.2 上述假定实际上是李普希兹条件 (Lipschitz condition) 假设，而常数 L_i^f ， L_i^F 以及 L_j^h 指李普希兹常数。这个假定是宽松的，实际上，对于连续有界的函数组 $f_i(\bullet)$ ， $F_i(\bullet)$ 及 $h_j(\bullet)$ 而言，这个条件总是满足的。对于存在有界吸引子的混沌系统而言，总存在上述李普希兹常数 (见^[44])。

根据自适应同步辨识方法，构造如下有着同等结构的响应网络

$$D^q \mathbf{y}_i = f_i(\mathbf{y}_i) + F_i(\mathbf{y}_i) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma \hat{c}_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) + \mathbf{u}_i \quad (5-6)$$

其中， $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})^T \in \mathbf{R}^m$ 是响应网络中第 i 个节点的动力系统的状态变量， $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \in \mathbf{R}^m$ 是未知参数 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的估计值， \hat{c}_{ij} 是未知的网络拓扑 c_{ij} 的估计值， $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^m$ 是反馈控制项。

本章的主要理论结果由定理 5.1 以及注 5.3~5.5 等组成。

定理 5.1 若假设 5.1~5.3 成立，设计如下的反馈控制器和参数更新律，则驱动网络与响应网络之间可达到同步，且分数阶复杂网络(5-2)中的未知参数 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 和未知拓扑 c_{ij} 均能被估计到某恒定值

$$\begin{cases} D^q \mathbf{y}_i = f_i(\mathbf{y}_i) + F_i(\mathbf{y}_i) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma \hat{c}_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) + \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_i = -k_i \mathbf{e}_i, \quad D^q k_i = d_i \|\mathbf{e}_i\|^2 \\ D^q \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = -F_i^T(\mathbf{y}_i) \mathbf{e}_i \\ D^q \hat{c}_{ij} = -\delta_{ij} \mathbf{e}_i^T \Gamma h_j(\mathbf{y}_j) = -\delta_{ij} \Gamma h_j^T(\mathbf{y}_j) \mathbf{e}_i \end{cases} \quad (5-7)$$

其中， $1 \leq i, j \leq N$ 且 d_i 和 δ_{ij} 可以是任意的正的常数。

证明 令 $\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i$ ， $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i - \boldsymbol{\alpha}_i$ ， $\tilde{c}_{ij} = \hat{c}_{ij} - c_{ij}$ 且 $\tilde{k}_i = k_i - k_i^*$ (其中 k_i^* 是某一待定的正的常数)， $1 \leq i, j \leq N$ 。进一步设 $\mathbf{X} = (\mathbf{E}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{k}})^T$ ，其中

$$\begin{cases} \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N)^T, \mathbf{e}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im})^T \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_N)^T, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i = (\tilde{\alpha}_{i1}, \tilde{\alpha}_{i2}, \dots, \tilde{\alpha}_{im})^T \\ \tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_N)^T, \tilde{\mathbf{c}}_i = (\tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, \dots, \tilde{c}_{iN})^T \\ \tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_N)^T \end{cases} \quad (5-8)$$

同步误差网络为

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{e}_i &= D^q \mathbf{y}_i - D^q \mathbf{x}_i \\ &= f_i(\mathbf{y}_i) - f_i(\mathbf{x}_i) + F_i(\mathbf{y}_i) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i - F_i(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\alpha}_i \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \Gamma \hat{c}_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) - \sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} h_j(\mathbf{x}_j) - k_i \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (5-9)$$

首先考察广义动力系统 $D^q \mathbf{X}$ 的性质。为方便起见，取其中耦合的两个节点 $\mathbf{X}_{i,j}$ 考虑，该双耦合节点的广义动力系统方程 $D^q \mathbf{X}_{i,j}$ 可描述为

$$D^q \mathbf{X}_{i,j} = (D^q \mathbf{e}_i, D^q \mathbf{e}_j, D^q \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i, D^q \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_j, D^q \tilde{\mathbf{c}}_{ij}, D^q \tilde{\mathbf{c}}_{ji}, D^q \tilde{k}_i, D^q \tilde{k}_j)^T \leq A(\mathbf{X}_{i,j}) \mathbf{X}_{i,j} \quad (5-10)$$

其中

$$A(\mathbf{X}_{i,j}) = \begin{bmatrix} L_i^f + L_i^f \boldsymbol{\alpha}_i - k_i & \sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} L_j^f & F_i(\mathbf{y}_i) & 0 & \sum_{j=1}^N \Gamma h_j(\mathbf{y}_j) & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^N \Gamma c_{ji} L_i^f & L_j^f + L_j^f \boldsymbol{\alpha}_j - k_j & 0 & F_j(\mathbf{y}_j) & 0 & \sum_{i=1}^N \Gamma h_i(\mathbf{y}_i) & 0 & 0 \\ -F_i^T(\mathbf{y}_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_j^T(\mathbf{y}_j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} \Gamma h_j^T(\mathbf{y}_j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{ji} \Gamma h_i^T(\mathbf{y}_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_i \mathbf{e}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_j \mathbf{e}_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在上式中， $A(\mathbf{X}_{i,j})$ 是一个时变的矩阵。因所有的矩阵元素均在一个有界的范围内变化，所以我们总能选取足够大的 k_i^* （注意到 $\tilde{k}_i + k_i^* = k_i$ ），以保证矩阵 $A(\mathbf{X}_{i,j})$ 的最大特征值满足 $|\arg(\lambda_{\max}(\mathbf{A}))| > q\pi/2$ 。因 $D^q \mathbf{X}_{i,j} \leq A(\mathbf{X}_{i,j}) \mathbf{X}_{i,j}$ 成立，所以上述分析间接证明足够大的 k_i^* 可使得误差系统 $D^q \mathbf{E}$ 是渐进稳定的，且所有未知参数和拓扑均能被估计到某一恒定值。

下面我们采用 5.2 节介绍的稳定性引理 5.3，给出一个直接的证明。选取实对称正定矩阵 P 如下

$$P = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{2N}, \frac{1}{\delta_{11}}, \frac{1}{\delta_{12}}, \dots, \frac{1}{\delta_{NN}}, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_N}) \quad (5-11)$$

我们有

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{X}^T P D^q \mathbf{X} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T D^q \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T D^q \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{ij} \frac{1}{\delta_{ij}} D^q \tilde{c}_{ij} + \sum_{i=1}^N \tilde{k}_i \frac{1}{d_i} D^q \tilde{k}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T (f_i(\mathbf{y}_i) - f_i(\mathbf{x}_i) + F_i(\mathbf{y}_i) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i - F_i(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\alpha}_i - k_i \mathbf{e}_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T (\sum_{j=1}^N \Gamma \hat{c}_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) - \sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} h_j(\mathbf{x}_j)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T (-F_i^T(\mathbf{y}_i) \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{ij} (-\mathbf{e}_i^T \Gamma h_j(\mathbf{y}_j)) + \sum_{i=1}^N \tilde{k}_i (\|\mathbf{e}_i\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T (f_i(\mathbf{y}_i) - f_i(\mathbf{x}_i)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T (F_i(\mathbf{y}_i)\boldsymbol{\alpha}_i - F_i(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\alpha}_i) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T F_i(\mathbf{y}_i)\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T (-F_i^T(\mathbf{y}_i)\mathbf{e}_i) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) - \sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} h_j(\mathbf{x}_j) \right) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^N \Gamma \tilde{c}_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{ij} (-\mathbf{e}_i^T \Gamma h_j(\mathbf{y}_j)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T (-\tilde{k}_i - k_i^*) \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^N \tilde{k}_i (\|\mathbf{e}_i\|^2) \\
 &\leq \sum_{i=1}^N (L_i^f + L_i^F \boldsymbol{\alpha}_i - k_i^*) \|\mathbf{e}_i\|^2 + \Gamma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_j^H \|c_{ij}\| \cdot \|\mathbf{e}_i^T\| \cdot \|\mathbf{e}_j\| \\
 &= \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{5-12}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \text{diag}(L_1^f + L_1^F \boldsymbol{\alpha}_1 - k_1^*, L_2^f + L_2^F \boldsymbol{\alpha}_2 - k_2^*, \dots, L_N^f + L_N^F \boldsymbol{\alpha}_N - k_N^*) + \Gamma \mathbf{L}^H \mathbf{C} \\
 \mathbf{L}^H &= [L_1^H, L_2^H, \dots, L_N^H]^T, \mathbf{C} = (c_{ij})_{N \times N}
 \end{aligned} \tag{5-13}$$

明显地，存在足够大的正的常数 $k_i^* (i=1, 2, \dots, N)$ ，使得矩阵 \mathbf{Q} 是负定的，即函数 $J = \mathbf{X}^T \mathbf{P} D^q \mathbf{X} \leq 0$ 成立，从而证明了误差系统的 $D^q \mathbf{E}$ （式(5-9)）的渐进稳定性，驱动网络与响应网络将达到同步。

注 5.3 参数更新律 $D^q k_i$ 以及 $D^q \hat{c}_{ij}$ 中的正的常数 δ_{ij} 和 d_i 可以控制参数估计以及同步过程的速度。另外，即使网络拓扑和系统参数是未知的，我们不必事先选定 k_i^* 的值以保证矩阵 \mathbf{Q} 的负定。在同步过程中，控制增益可自适应的调整到一个合适的值。

注 5.4 上述的证明和分析只能保证误差系统 $D^q \mathbf{E}$ 的稳定性，而不能保证未知系统参数和拓扑一定能收敛到真值，若要成功辨识未知参数和网络拓扑，还需设定其他条件。当驱动网络和响应网络达到同步时，即 $\mathbf{e}_i = 0$ 或者 $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i$ ，在同步流形上下述方程成立

$$\begin{cases} f_i(\mathbf{y}_i) = f_i(\mathbf{x}_i) \\ F_i(\mathbf{y}_i) = F_i(\mathbf{x}_i) \\ h_j(\mathbf{y}_j) = h_j(\mathbf{x}_j) \end{cases} \tag{5-14}$$

将 $\mathbf{e}_i = 0$ 以及上式代入误差网络系统(5-9)中，可得如下等式

$$F_i(\mathbf{x}_i)\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma h_j(\mathbf{x}_j)\tilde{c}_{ij} = \mathbf{0} \tag{5-15}$$

若将函数组 $F_i(\mathbf{x}_i)$ 和 $h_j(\mathbf{x}_j)$ 看成一般的常数矩阵，则上式其实等同于一般的线性方程组。令

$$\begin{cases} F_i(\mathbf{x}_i) = (F_i^{(1)}(\mathbf{x}_i), F_i^{(2)}(\mathbf{x}_i), \dots, F_i^{(m_i)}(\mathbf{x}_i)) \\ h_j(\mathbf{x}_j) = (h_j^{(1)}(\mathbf{x}_j), h_j^{(2)}(\mathbf{x}_j), \dots, h_j^{(N)}(\mathbf{x}_j)) \end{cases} \quad (5-16)$$

为保证该方程组有唯一的零解（即 $\tilde{\alpha}_i = 0$ 且 $\tilde{c}_{ij} = 0$ ），需对函数组 $F_i(\mathbf{x}_i)$ 及 $h_j(\mathbf{x}_j)$ 的性质做限定，函数组中的各个函数元素 $\{F_i^{(j)}(\mathbf{x}_i)|_{j=1,2,\dots,m_i}, h_j^{(i)}(\mathbf{x}_j)|_{i=1,2,\dots,N}\}$ 必须在同步流形上满足线性独立的条件。否则，对于方程(5-16)不能保证零解，此时未知参数和拓扑可能会被辨识到其他虚假值。

注 5.5 在辨识未知的系统参数和网络拓扑时，我们必须从网络的演化状态中获取足够的信息量，这就是上述线性独立条件的含义。若第 i 个节点的动力学演化趋于某一稳定状态，则函数组 $F_i^{(j)}(\mathbf{x}_i)|_{j=1,2,\dots,m_i}$ 将线性依赖，此时未知参数 $\tilde{\alpha}_i$ 将被辨识到虚假值。另外，若驱动网络中的部分节点形成了内同步，则函数组 $h_j^{(i)}(\mathbf{x}_j)|_{i=1,2,\dots,N}$ 亦将不满足线性独立，从而会造成网络拓扑的辨识失败。在 5.5 节中，我们将基于上述分析，对影响网络拓扑辨识的两个重要参数进行讨论。

根据定理 5.1，可得出下述推论。

推论 5.1 若分数阶复杂网络均由 N 个相同节点组成，即

$$D^q \mathbf{x}_i = f(\mathbf{x}_i) + F(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} h_j(\mathbf{x}_j) \quad (5-17)$$

则未知的系统参数和网络拓扑可由下述控制器与参数更新律进行估计

$$\begin{cases} D^q \mathbf{y}_i = f(\mathbf{y}_i) + F(\mathbf{y}_i) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma \hat{c}_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) + \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_i = -k_i \mathbf{e}_i, \quad D^q k_i = d_i \|\mathbf{e}_i\|^2 \\ D^q \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = -F^T(\mathbf{y}_i) \mathbf{e}_i \\ D^q \hat{c}_{ij} = -\delta_{ij} \mathbf{e}_i^T \Gamma h_j(\mathbf{y}_j) \end{cases} \quad (5-18)$$

其中， $1 \leq i, j \leq N$ 且 d_i 和 δ_{ij} 是正的常数值。进一步的，假定各个节点的未知参数 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 均相同，则对参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的更新辨识律可修正为

$$D^q \hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\sum_{i=1}^N F^T(\mathbf{y}_i) \mathbf{e}_i \quad (5-19)$$

推论 5.1 的证明过程与定理 5.1 类似。

推论 5.2 若各个节点的动力系统的阶次为 1，则不确定复杂网络将转化为常规的整数阶复杂网络，即

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f_i(\mathbf{x}_i) + F_i(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma c_{ij} h_j(\mathbf{x}_j) \quad (5-20)$$

此时，控制器与辨识方案修正为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_i = f_i(\mathbf{y}_i) + F_i(\mathbf{y}_i)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i + \sum_{j=1}^N \Gamma \hat{c}_{ij} h_j(\mathbf{y}_j) + \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_i = -k_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{k}_i = d_i \|\mathbf{e}_i\|^2 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_i = -F_i^T(\mathbf{y}_i)\mathbf{e}_i, \\ \dot{\hat{c}}_{ij} = -\delta_{ij} \mathbf{e}_i^T \Gamma h_j(\mathbf{y}_j) \end{cases} \quad (5-21)$$

对于**推论 5.2**的证明，仍可沿用**定理 5.1**的证明过程，并运用分数阶微分的性质之一 $-D^1 f(t) = df(t)/dt$ 得到。另外，我们也可用 Lyapunov 稳定性来证明，构造如下的 Lyapunov 函数

$$V = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{\delta_{ij}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{ij}^2 + \frac{1}{d_i} \sum_{i=1}^N \tilde{k}_i^2 \right) / 2 \quad (5-22)$$

对上述 Lyapunov 函数沿着误差系统进行求导，分析 Lyapunov 函数导数的负定可证明误差系统的稳定性。类似地，为保证未知参数和拓扑的成功识别，相关函数项的线性独立条件仍然必须满足。

注 5.5 **推论 5.2** 的结论实际上与文献[47,86-87]报导的结果是一致的。因整数阶复杂网络是分数阶复杂网络的一个特例，所以本章中所研究的问题是一个更为一般的复杂网络辨识问题，且本章给出了一个更为一般的结论。

5.4 应用与仿真计算

在本节中，将给出两个应用例子来说明辨识方法的有效性。

5.4.1 恒定网络拓扑的辨识

假定复杂网络的各个节点均由分数阶的 Lorenz 系统组成，第 i 个节点的动力方程为

$$\begin{cases} D^{q_{i1}} x_{i1} = \delta(x_{i2} - x_{i1}) \\ D^{q_{i2}} x_{i2} = rx_{i1} - x_{i1}x_{i3} - x_{i2} \\ D^{q_{i3}} x_{i3} = x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} \end{cases} \quad (5-23)$$

系统参数的真实值选取为 $(\delta, r, b)^T = (10, 28, 8/3)^T$ 。上式(5-23)可重写为如下的紧凑形式

$$D^{q_i} x_i = f(x_i) + F(x_i) \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} - x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_{i2} - x_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & x_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & -x_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ r \\ b \end{pmatrix} \quad (5-24)$$

在文献[31]中, 可知分数阶 Lorenz 系统在阶次为 $q_i > 0.99$ 时将表现混沌特性。因分数阶 Lorenz 吸引子总存在于一个连续有界的奇怪吸引子域内, **假设 5.1** 与 **假设 5.2** 总是成立。

我们考虑一个由四个分数阶 Lorenz 系统作为节点组成的加权分数阶网络, 网络的拓扑权值矩阵设为

$$C_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

设各个节点之间为线性耦合, 即 $h_j(x_j) = x_j$, 此时 **假设 5.3** 亦成立, 分数阶复杂网描述为

$$D^{q_i} x_i = f(x_i) + F(x_i) \alpha_i + \Gamma \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_j \quad (5-26)$$

根据定理 5.1 的结论, 设计如下的响应网络、反馈控制器以及参数更新律

$$\begin{cases} D^{q_{ij}} c_{ij} = -\Gamma \delta_{ij} (e_{i1} \ e_{i2} \ e_{i3}) \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ y_{i3} \end{pmatrix} \\ D^{q_{i1}} \delta_i = -(y_{i2} - y_{i1}) e_{i1} \\ D^{q_{i2}} r_i = -y_{i1} e_{i2} \\ D^{q_{i3}} b_i = y_{i3} e_{i3} \end{cases} \quad (5-27)$$

在数值仿真中, 所有的初值选取如下数值

$$\begin{cases} x_i(0) = (4.5 + 0.5i, 5.5 + 0.5i, 9.5 + 0.5i)^T \\ y_i(0) = (5 + 0.5i, 6 + 0.5i, 7 + 0.5i)^T \\ \hat{\alpha}_i(0) = (\delta_i(0), r_i(0), b_i(0))^T = (5 + 0.5i, 24 + 0.5i, 4.5 + 0.5i)^T \\ c_{ij}(0) = 1, k_i(0) = 1 \end{cases} \quad (5-28)$$

其中 $1 \leq i, j \leq 4$ 。为简便处理, 正的常数 d_i 和 δ_{ij} 分别选取为 $d_i = 1$ 、 $\delta_{ij} = 1$ 。内耦合强度 Γ 以及分数阶次 q_{ij} 分别为 $\Gamma = 0.02$ 及 $q_{ij} = 0.995$ 。

从式(5-24)可知, 未知参数的辨识函数项 $F(x_i)$ 是线性独立的, 因此未知参数能被成功辨识。另外, 所有驱动网络的节点并未形成内同步, 所以网络拓扑亦能顺利辨识。

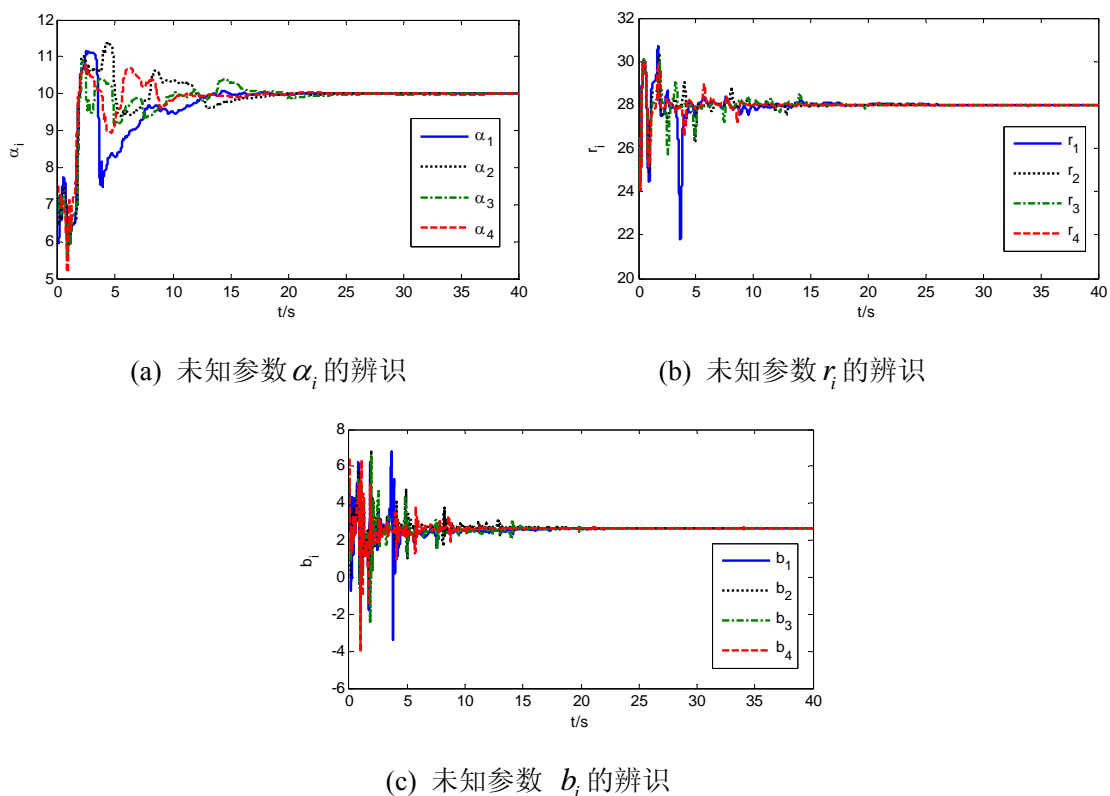


图 5-1 网络中节点系统的未知参数的辨识

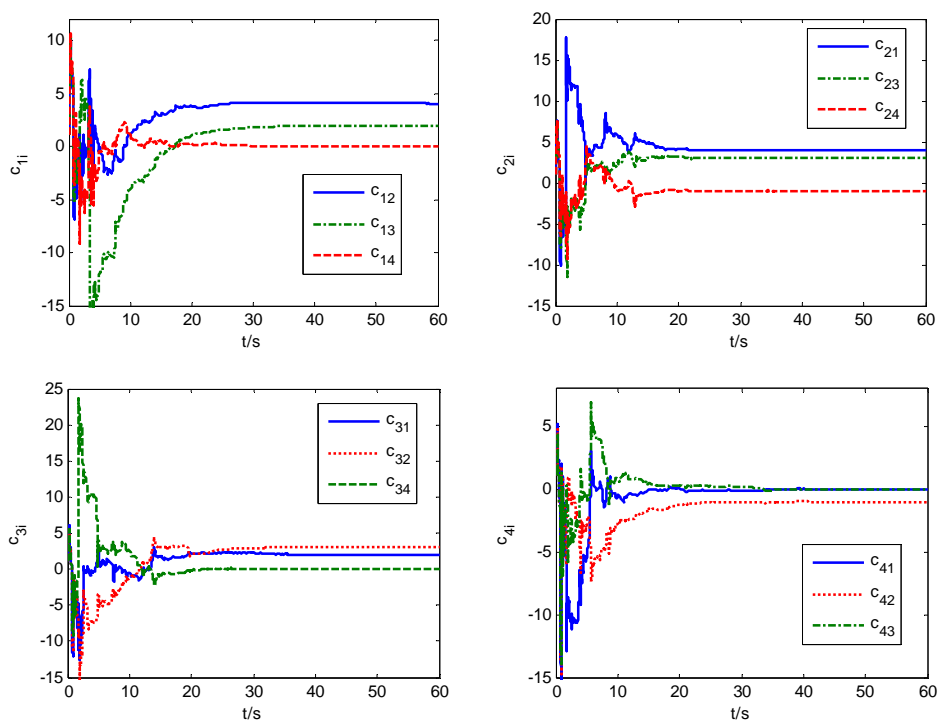


图 5-2 网络拓扑的辨识

图 5-1 描述了各节点的未知参数值的估计和演化过程，图 5-2 描述了未知的网络拓扑的估计和演化过程，从图 5-1 和图 5-2 可看出，所有未知参数和网络拓扑均被估

计到真值。从图 5-3 中可看到控制增益自适应地调整到合适的值。

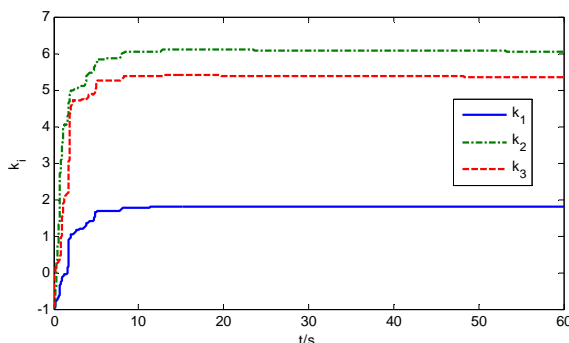


图 5-3 控制增益的时间演化

5.4.2 切换网络拓扑的辨识

在本小节中，进一步考虑如下情形：网络的拓扑不是恒定的而是切换的，或者网络连接是时变的。我们仍沿用上一小节中所采用的分数阶网络，同时假定在 $t = 60s$ 时网络的耦合拓扑矩阵切换到如下矩阵所描述的拓扑

$$C'_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-29)$$

明显地，由上述矩阵 $C'_{4 \times 4}$ 所描述的网络不再是一个对称的网络。

在数值仿真中，所有的初值仍沿用上一小节中的设定。仿真结果见图 5-4。从图中可看出，所设计的参数更新律有着很好的实时辨识性能，即该方法可用于时变切换的分数阶网络的监测中。

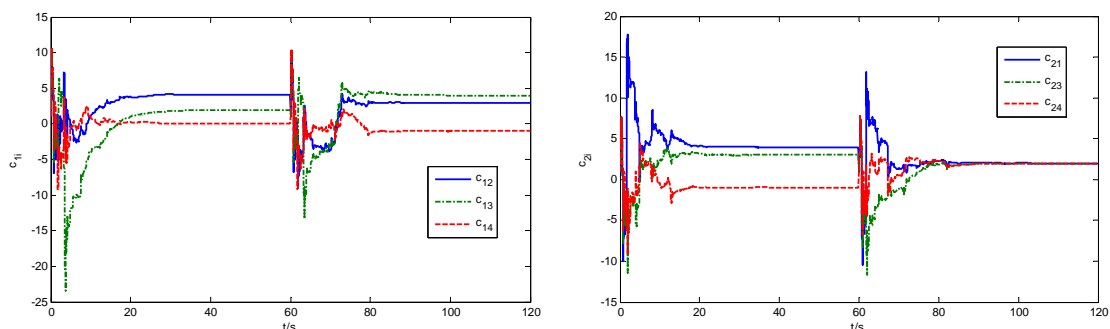


图 5-4 切换网络拓扑的辨识

5.5 影响分数阶网络辨识的因素

正如注 5.5 所指出的，线性独立条件对于网络是否能成功辨识有着直接的影响。分数阶复杂网络的两个内在参数，即耦合强度 Γ 与分数阶的阶次 q_i ，直接影响到由式 (5-16) 所描述的函数组的线性独立性质。不同的分数阶阶次 q_i 或者耦合强度 Γ 将使得式 (5-16) 的函数项或者线性独立或者线性依赖。在本节中，我们将考察这两个因素对于网

络成功辨识的影响。

5.5.1 耦合强度对辨识的影响

耦合强度 Γ 在很大程度上会影响到网络的性能。已有文献[87-88]报导, 强耦合强度将导致驱动网络的不同节点形成内同步 (inner synchronization), 当不同的节点达到内同步时, 其各自的动力学演化将趋于一致, 从而导致相关的函数项不再线性独立, 此时网络的拓扑将会失败。

我们仍然用 5.4.1 节所构建的分数阶复杂网络作为例子, 来说明耦合强度 Γ 对分数阶网络辨识的影响。考虑如下的星形连接的分数阶网络

$$C'_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-30)$$

在计算中发现, 对于给定的由分数阶 Lorenz 系统作为节点组成的分数阶复杂网络, 当耦合强度 $\Gamma \geq 0.45$ 时, 将会观察到驱动节点的内同步的发生。此时, 驱动变量的相关函数项不再满足线性独立条件, 网络的拓扑不再辨识到真值。图 5-5 的计算结果展示了拓扑辨识失败的例子。

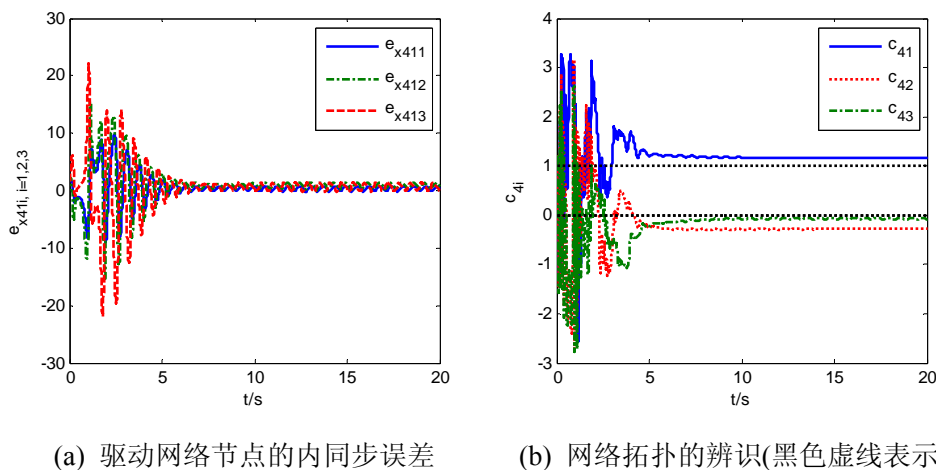


图 5-5 过大的耦合强度导致网络拓扑辨识失败

在文献[88]中, 作者在研究整数阶复杂网络的识别问题时提出一个有趣的结论: 同步是阻碍网络识别的。由本小节分析可知, 这个结论也可推广至分数阶复杂网络的识别问题中。

另一个有趣的问题是: 多大的内耦合强度将导致识别失败? 直接计算耦合强度在很多情况中不可行; 根据本节的分析, 一个有效的替换方法是: 观察驱动节点是否发生同步来判别耦合强度, 从而进一步判断网络拓扑是辨识到真实值还是虚假值。

5.5.2 分数阶阶次对网络辨识的影响

动力系统的阶次 q_i 会直接影响系统的动力学特征, 对于分数阶动力系统的控制以及同步问题, 分数阶阶次是一个很重要的参数。例如, 文献[39]曾报导, 对于分数阶复

杂网络的牵引控制 (pinning control) 问题, 低阶次的分数阶复杂网络相对而言更容易控制也更容易达到同步。

对于一般非线性分数阶混沌系统而言, 存在一个最小的分数阶阶次阈值 q_i , 使得该系统能呈现混沌吸引子^[89]。反之, 若阶次低于该阈值阶次, 则动力系统会退化为有限环、周期运动甚至是不动点, 而这些退化的动态性能往往导致相关函数项不再满足线性独立条件, 从而导致网络拓扑的辨识失败。

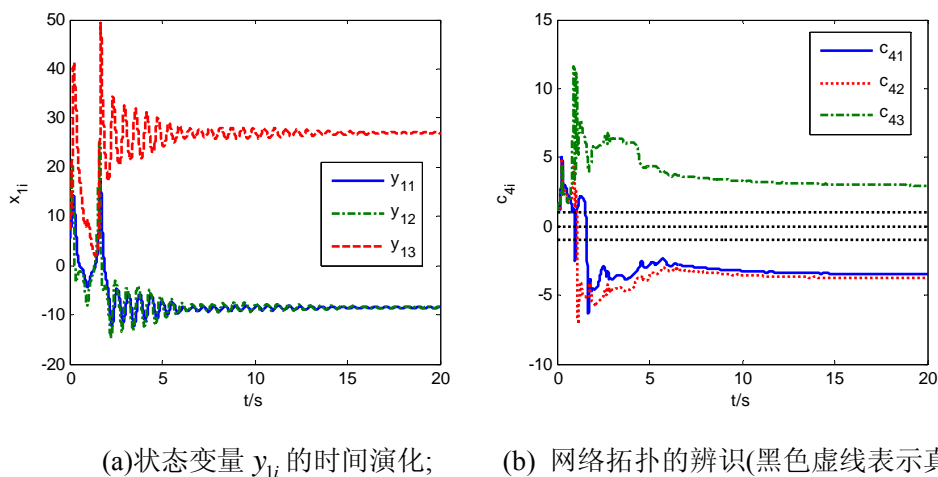


图 5-6 过小的分数阶阶次导致网络拓扑辨识失败

我们仍沿用分数阶 Lorenz 系统构成的复杂网络作为例子, 并且设置各个节点的力学方程的阶次为 0.975, 其余设置均与前节相同。图 5-6 给出了计算结果, 正如所预测的, 每个动力学节点收敛到了稳定的不动点, 此时的网络拓扑辨识失败 (即辨识到了虚假值)。

从本节的分析和计算实例, 可得出如下结论:

- 过大的耦合强度 Γ 将不利于网络参数和拓扑的辨识, 因为不同节点之间的信息量将会因为内同步的发生而丧失;
- 过小的分数阶阶次 q_i 也不利于网络参数和拓扑的辨识, 因为各个节点本身的动力学的退化将导致单个节点信息量的丧失。

5.6 本章小结

在本章中, 针对分数阶复杂网络的辨识问题, 基于自适应同步的概念, 提出了一种通用的方法; 并利用分数阶动力系统的稳定性引理给出了严格的证明, 推导出成功辨识的充分条件, 扩展了现有文献中关于网络拓扑辨识的结论。在仿真实例中, 对由四个分数阶 Lorenz 系统组成的不确定复杂网络进行辨识, 结果表明该方法既能辨识恒定拓扑的网络, 又能辨识切换或者时变拓扑的网络。

我们讨论了影响网络成功辨识的因素, 发现过大的耦合强度和过小的分数阶阶次均不利于网络的成功辨识。

6 含未知参数的动力系统或复杂网络的自适应同步设计

6.1 引言

自从 Parlitz U.^[41]提出利用同步来辨识系统参数的方法以来, 自适应同步设计引起了很多研究者的兴趣。自适应同步主要有两个应用: I. 在动力系统(不管是驱动系统还是响应系统)含未知参数或不确定参数的情况下, 我们仍然能够通过自适应控制的方法获得动力系统的同步, 这对于在不确定环境下构建保密通信方案有着重要的意义; II. 若需要辨识动力系统未知参数, 我们可以通过构造结构一致的响应模型(或称计算模型), 通过最小化两者之间的同步误差来设计参数更新方程, 从而辨识出未知参数。

我们在 1.2.4 节简略回顾了自适应同步方法的研究趋势。目前文献中关于自适应同步的文章非常多, 研究者将这种方法推广到了很多场合。例如文献[90]设计了自适应控制器, 使含有时滞的不确定神经网络达到了同步; 文献[91]利用自适应同步的概念讨论了混沌系统中未知参数的可辨识性, 并分别以帐篷映射、Henon 映射、二阶 Markov 映射以及 Chua 电路等经典的离散或连续系统为例, 详细阐述了参数辨识的方法和步骤; 香港城大的 Liu Ying 在其博士论文^[92]中, 则利用自适应同步的方法破解了前人提出的一系列的混沌加密方案。这些研究都大大丰富了动力系统同步的研究内容。

在本章中, 我们首先回顾一些文献中所提出的关于自适应同步的不准确的方案, 并给予修正; 同时讨论保证参数辨识成功的线性独立条件(及持续激励条件); 分析导致参数辨识失败的辨识函数产生线性依赖的几种典型情况, 并提出了几类措施保证线性独立条件。

6.2 文献回顾及同步方案

6.2.1 不可行的参数辨识律

最近的一篇文献[93]研究了自适应广义函数投影同步(adaptive generalized function projective synchronization (GFPS))问题。考虑如下的驱动系统与响应系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F_1(X) + F_2(X)\xi \\ \dot{Y}(t) = G_1(Y) + G_2(Y)\eta + U(X, Y, t) \end{cases} \quad (6-1)$$

其中, 关于 $F_1, G_1: R^n \rightarrow R^n$ 与 $F_2: R^n \rightarrow R^{n \times m}, G_2: R^n \rightarrow R^{n \times l}$ 的定义和描述可见文献^[93]。 $\xi \in R^m, \eta \in R^l$ 是待辨识的未知系统参数。根据 GFPS 同步形式的定义, 误差系统为

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \dot{Y} - \frac{d(\Lambda(X)X)}{dX} \dot{X} \\ &= G_1(Y) + G_2(Y)\eta - J(F_1(X) + F_2(X)\xi) + U(X, Y, t)\end{aligned}\quad (6-2)$$

其中, $J = d(\Lambda(X)X)/dX$ 。文献^[93]提出了如下的控制器形式和参数辨识律

$$U(X, Y, t) = J(F_2(X)\hat{\xi} + F_1(X)) - G_1(Y) - G_2(Y)\hat{\eta} - E \quad (6-3)$$

以及

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = -\dot{\xi} = \tilde{\xi} - F_2^T(X)J^T E \\ \dot{\hat{\eta}} = -\dot{\eta} = \tilde{\eta} + G_2^T(Y)E \end{cases} \quad (6-4)$$

其中, $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$ 和 $\tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}$ 表示未知参数的估计误差。事实上, 上式(6-4)可重写为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = (\xi - \hat{\xi}) - F_2^T(X)J^T E \\ \dot{\hat{\eta}} = (\eta - \hat{\eta}) + G_2^T(Y)E \end{cases} \quad (6-5)$$

可以看到, 未知参数的更新律中包含了参数本身的真实值, 而该真实值在估计之前是未知的, 因此上述参数辨识律在实际中是不可行的。我们提出如下修正的方案

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = -F_2^T(X)J^T E \\ \dot{\hat{\eta}} = G_2^T(Y)E \end{cases} \quad (6-6)$$

构建正定的 Lyapunov 函数 $V(t) = \frac{1}{2}E^T E + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T \xi + \frac{1}{2}\tilde{\eta}^T \eta$, 同时通过 Lyapunov 稳定性理论以及 Barbalat 引理, 可以证明上述控制器和参数辨识律能保证驱动系统与响应系统之间的同步。与第 2 章及第 5 章相关章节的分析类似, 令函数项 $G_2(Y) = (G_2^{(1)}(Y), G_2^{(2)}(Y), \dots, G_2^{(m)}(Y))^T$ 以及函数项 $JF_2(X) = (JF_2^{(1)}(X), JF_2^{(2)}(X), \dots, JF_2^{(l)}(X))^T$ 在同步流形上线性独立, 则未知参数 ξ 与 η 可辨识到真实值。

值得注意的是, 文献[94-95]中的不准确的理论结果可类似修正。

另外, 最近的一篇文章^[96]讨论了带不同节点的不同结构整数阶复杂网络的自适应同步与网络辨识问题。考虑如下的驱动网络与响应网络

$$\begin{cases} \dot{x}^i = f_1^i(x^i) + g_1^i(x^i)\alpha^i + \sum_{j=1}^N c_{ij}Ax^j, & i=1, 2, \dots, N, \\ \dot{y}^i = f_2^i(y^i) + g_2^i(y^i)\beta^i + \sum_{j=1}^N \hat{c}_{ij}Ay^j + u^i, & i=1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (6-7)$$

对于 $x^i, y^i, f_1^i, f_2^i, g_1^i, g_2^i, c_{ij}, \hat{c}_{ij}$ 以及 A 的含义和定义可见文献[96]。注意到 $\alpha^i, \beta^i \in R^m$ 是未知的系统参数。定义网络的同步误差为 $e^i = y^i - h(t)x^i$, 网络同步误差为

$$\begin{aligned} \dot{e}^i &= \dot{y}^i - h(t)\dot{x}^i - \dot{h}(t)x^i \\ &= g_2^i(y^i)(\beta^i - \tilde{\beta}^i) - h(t)g_1^i(x^i)(\alpha^i - \tilde{\alpha}^i) + \sum_{j=1}^N \hat{c}_{ij}Ay^j - \sum_{j=1}^N c_{ij}Ah(t)x^j - \dot{h}(t)x^i + k^i e^i \end{aligned} \quad (6-8)$$

文献[96]的作者提出如下的控制器和自适应更新律

$$\begin{cases} \dot{u}^i = -f_2^i(y^i) - g_2^i(y^i)\tilde{\beta}^i + k^i e^i + h(t)(f_1^i(x^i) + g_1^i(x^i)\tilde{\alpha}^i), \\ \dot{\hat{c}}_{ij} = -(e^i)^T Ay^j, \\ \dot{\tilde{\alpha}}^i = -h(t)(g_1^i(x^i))^T e^i + e_{\alpha^i}^i, \\ \dot{\tilde{\beta}}^i = (g_2^i(y^i))^T e^i + e_{\beta^i}^i, \\ \dot{h}(t) = (x^i)^T e^i, \\ \dot{k}^i = -(e^i)^T e^i, \end{cases} \quad (6-9)$$

其中, $e_{\alpha^i}^i = \alpha^i - \tilde{\alpha}^i$, $e_{\beta^i}^i = \beta^i - \tilde{\beta}^i$ 表示参数的估计误差, 而 $\tilde{\alpha}^i$ 及 $\tilde{\beta}^i$ 是未知参数 α^i , β^i 的估计值. 对于上式, 事实上与文献[93]的理论结果有着类似的缺陷, 即将未知的系统参数真实值应用到参数更新方程里了。

作为对文献[96]的上述理论结果的修正, 我们提出如下控制项

$$\begin{cases} \dot{u}^i = -f_2^i(y^i) - g_2^i(y^i)\tilde{\beta}^i + k^i e^i + h(t)(f_1^i(x^i) + g_1^i(x^i)\tilde{\alpha}^i), \\ \dot{\hat{c}}_{ij} = -(e^i)^T Ay^j, \\ \dot{\tilde{\alpha}}^i = -h(t)(g_1^i(x^i))^T e^i, \\ \dot{\tilde{\beta}}^i = (g_2^i(y^i))^T e^i, \\ \dot{h}(t) = (x^i)^T e^i, \\ \dot{k}^i = -(e^i)^T e^i, \end{cases} \quad (6-10)$$

构建正定的 Lyapunov 函数如下

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e^i)^T e^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_{\alpha^i}^i)^T e_{\alpha^i}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_{\beta^i}^i)^T e_{\beta^i}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k^i + L)^2 \quad (6-11)$$

将上式(6-11)沿着误差系统(6-8)求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N (e^i)^T [g_2^i(y^i)(\beta^i - \tilde{\beta}^i) - h(t)g_1^i(x^i)(\alpha^i - \tilde{\alpha}^i) + \sum_{j=1}^N \hat{c}_{ij}Ay^j - \sum_{j=1}^N c_{ij}Ah(t)x^j - \dot{h}(t)x^i + k^i e^i] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (h(t)(g_1^i(x^i))^T e^i)^T e_{\alpha^i}^i - \sum_{i=1}^N ((g_2^i(y^i))^T e^i)^T e_{\beta^i}^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\hat{c}_{ij} - c_{ij})\dot{\tilde{c}}_{ij} + \sum_{i=1}^N (k^i + L)\dot{k}^i \\ &= \sum_{i=1}^N (e^i)^T [\sum_{j=1}^N c_{ij}Ay^j - \sum_{j=1}^N c_{ij}Ah(t)x^j - \dot{h}(t)x^i] - \sum_{i=1}^N L(e^i)^T e^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (e^i)^T c_{ij} A e^j - L \sum_{i=1}^N (e^i)^T e^i - \sum_{i=1}^N (e^i)^T [(x^i)^T e^i] x^i \\
&= e^T Q e - \sum_{i=1}^N (e^i)^T [(x^i)^T e^i] x^i
\end{aligned} \tag{6-12}$$

其中, $e = (e^1(t), e^2(t), \dots, e^N(t))^T \in R^{nN}$, $Q = (P + P^T) / 2$, $P = C \otimes A - L I_{nN}$ 。注意到 $-\sum_{i=1}^N (e^i)^T [(x^i)^T e^i] x^i \leq 0$, 因此可通过选取足够大的正的常数 L , 来保证对称矩阵 Q 是负定的, 从而进一步保证了 \dot{V} 的负定。同样, 根据 Barbalat 引理, 可推导得到当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $e^i(t) \rightarrow 0$ ($i=1 \sim N$)。另外, 根据 LaSalle 不变集理论, 最大不变集 M 为

$$\begin{aligned}
M &= \{(e, \alpha^i, \beta^i, c_{ij}, k^i) \in R^{N+2m_i+N \times N+N} \mid e^i = 0, \dot{e}^i = 0\} \\
&= \{(e, \alpha^i, \beta^i, c_{ij}, k^i) \in R^{N+2m_i+N \times N+N} \mid \\
&\quad e^i = 0, g_2^i(y^i)(\beta^i - \tilde{\beta}^i) - h(t)g_1^i(x^i)(\alpha^i - \tilde{\alpha}^i) + \sum_{j=1}^N (\hat{c}_{ij} - c_{ij}) A x^j = 0\}
\end{aligned} \tag{6-13}$$

若函数项 $g_2^i(y^i)$, $h(t)g_1^i(x^i)$ 以及 $\sum_{j=1}^N A x^j$ 在同步流形上是线性独立的, 则所有的未知参数 β^i , α^i 以及网络拓扑 c_{ij} 均能被辨识到真实值。

6.2.2 线性独立条件的忽视

由第 2 章、第 5 章以及本章上一小节的分析可知, 相关函数项的线性独立条件对于是否能成功辨识未知参数和拓扑是很重要的。当这个条件不能被满足时, 辨识往往不能成功。然而, 有部分文献忽视了这个重要的条件。

在文献[97]中, 作者讨论了 Lorenz 系统与 Chen 系统之间的多切换同步 (multi-switching synchronization) 问题。两个系统分别描述如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = c_1 x_1 - x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b_1 x_3 \end{cases} \tag{6-14}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_2(y_2 - y_1) + u_{i1}(t) \\ \dot{y}_2 = (c_2 - a_2)y_1 - y_1 y_3 + c_2 y_2 + u_{i2}(t) \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - b_2 y_3 + u_{i3}(t) \end{cases} \tag{6-15}$$

相应系统变量之间的同步误差为 $e_{11} = y_1 - x_1$, $e_{12} = y_2 - x_2$ 和 $e_{13} = y_3 - x_3$ 。作者设计如下的控制器函数和参数辨识律

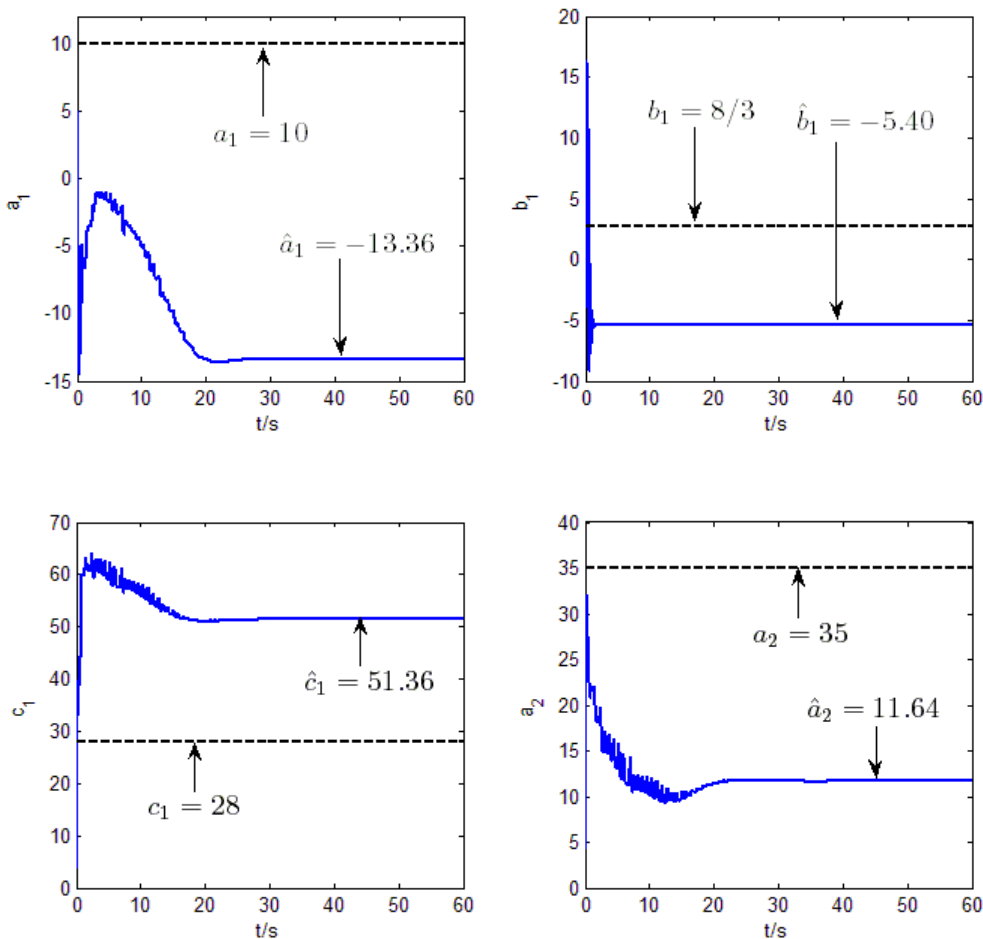
$$\begin{cases} u_{11}(t) = -e_{11} - \bar{a}_2(y_2 - y_1) + \bar{a}_1(x_2 - x_1) \\ u_{12}(t) = -e_{12} - (\bar{c}_2 - \bar{a}_2)y_1 + y_1 y_3 - \bar{c}_2 y_2 + \bar{c}_1 x_1 - x_1 x_3 - x_2 \\ u_{13}(t) = -e_{13} - y_1 y_2 + \bar{b}_2 y_3 + x_1 x_2 - \bar{b}_1 x_3 \end{cases} \tag{6-16}$$

以及

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_1 = -(x_2 - x_1)e_{11} \\ \dot{\hat{b}}_1 = x_3e_{13} \\ \dot{\hat{c}}_1 = -x_1e_{12} \\ \dot{\hat{a}}_2 = (y_2 - y_1)e_{11} - y_1e_{12} \\ \dot{\hat{b}}_2 = -y_3e_{13} \\ \dot{\hat{c}}_2 = y_1e_{12} + y_2e_{12} \end{cases} \quad (6-17)$$

其中, $\bar{a}_1 \sim \bar{c}_2$ 是未知参数 $a_1 \sim c_2$ 的估计值。事实上, 当驱动系统与响应系统之间达到同步时, 我们有 $x_1(t) = y_1(t)|_{t \rightarrow \infty}$, $x_2(t) = y_2(t)|_{t \rightarrow \infty}$, $x_3(t) = y_3(t)|_{t \rightarrow \infty}$ 以及 $y_2(t) - y_1(t) = x_2(t) - x_1(t)|_{t \rightarrow \infty}$ 。因此在同步流形上, 相关辨识函数项(6-17)并非是线性独立的, 比如 \hat{b}_1 与 \hat{b}_2 的辨识函数项 x_3 与 $-y_3$ 在同步流形 $y_3 \rightarrow x_3$ 不满足线性独立条件, 对于其余的未知参数 a_1 、 a_2 与 c_1 亦是如此。故除参数 c_2 之外, 其余未知参数均不能被辨识到真实值。我们采用了文献[97]相同的初值, 进行了一组仿真计算。计算结果见图 6-1, 与上述理论分析过程是相吻合的。

另外, 文献[98-99]的结果也忽视了 LI 条件。



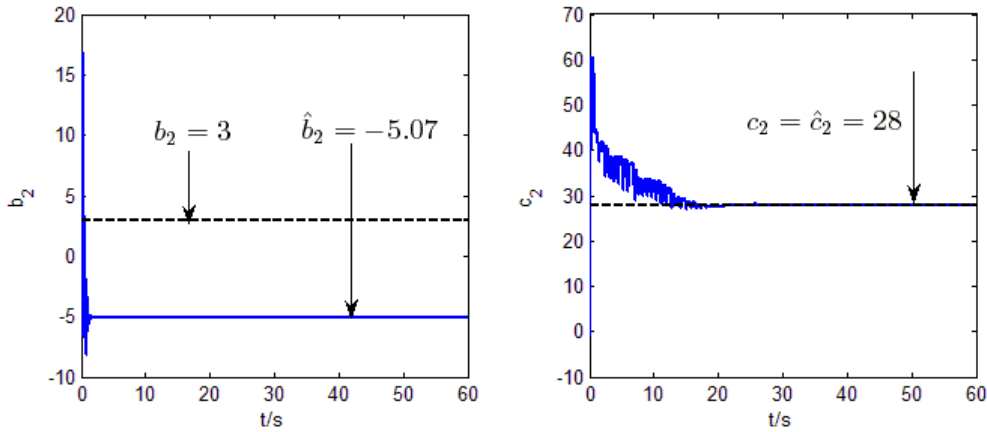


图 6-1 线性独立条件不满足时动力系统未知参数的辨识(黑色虚线表示真实值)

6.3 辨识函数的线性独立性

考虑如下的驱动系统与响应系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + F(x)P \\ \dot{y} = g(y) + G(y)Q + U \end{cases} \quad (6-18)$$

其中, $x, y, f(x), g(y), F(x), G(y)$ 都是一定维数的系统变量或者系统函数, P, Q 是未知的系统参数。设计如下的非线性控制器和参数辨识律使系统(6-18)达到自适应同步

$$\begin{cases} U = -g(y) + f(x) - G(y)\hat{Q} + F(x)\hat{P} - Ke \\ \dot{\hat{Q}} = -\hat{Q} = -G^T(y)e \\ \dot{\hat{P}} = -\hat{P} = F^T(x)e \end{cases} \quad (6-19)$$

其中 K 是控制器项中的控制增益, \hat{Q}, \hat{P} 分别是未知参数的估计值。

6.3.1 线性独立条件与持续激励条件

在第 2 章的注 2.2, 提到 LI 条件与 PE 条件之间的关系, 下面通过严格的理论证明揭示两者之间的关系。首先给出持续激励的定义^[57]以及一个有用的引理^[100]。

定义 6.1 (见^[57]) 函数项 ϕ 是持续激励的, 若存在正常数 α_1, α_0, T_0 , 使得

$$\alpha_1 I \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \phi(\tau)\phi^T(\tau)d\tau \geq \alpha_0 I \quad (6-20)$$

引理 6.1 (见^[100]) 考虑如下的系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = h_1(t)e_2 + h_2(t); e_1 \in \mathbb{R}^p \\ \dot{e}_2(t) = h_3(t) \end{cases} \quad (6-21)$$

若

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_1(t)\| = 0; \lim_{t \rightarrow \infty} \|h_2(t)\| = 0; \lim_{t \rightarrow \infty} \|h_3(t)\| = 0;$$

$$(ii) h_1(t), \dot{h}_1(t) \text{ 是有界的, 且 } h_1^T(t) \text{ 是持续激励的}$$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_2(t)\| = 0$ 。

对于系统(6-18)的自适应同步与参数辨识问题, 其误差动力系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y} - \dot{x} \\ &= g(y) - f(x) + G(y)Q - F(x)P + U \end{aligned} \quad (6-22)$$

代入控制器项 U , 可得

$$\begin{cases} \dot{e} = G(y)\tilde{Q} - F(x)\tilde{P} - Ke \\ \dot{\tilde{Q}} = -G^T(y)e \\ \dot{\tilde{P}} = F^T(x)e \end{cases} \quad (6-23)$$

对比引理 6.1 中的系统形式, 将方程组(6-23)改写成式(6-21)的形式, 其中

$$\begin{cases} e_1 = e, \\ e_2 = [\tilde{Q}, \tilde{P}]^T, \\ h_1 = [G(y), -F(x)] \\ h_2 = -Ke \\ h_3 = [-G^T(y)e, F^T(x)e]^T \end{cases} \quad (6-24)$$

通过 Lyapunov 稳定性及 Barbalat 引理, 可证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$; 同理, 我们有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|h_2(t)\| = 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|h_3(t)\| = 0$ 。另外, 因 $[G(y), -F(x)]$ 以及 $[\dot{G}(y), -\dot{F}(x)]$ 总是有界的, 根据引理 6.1 的条件, 若需获得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{Q}\| = 0$ 及 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{P}\| = 0$ (即参数的成功辨识), 其他唯一的条件是函数项 $h_1^T(t) = [G(y), -F(x)]^T$ 必须是持续激励的。这从另一个角度给出了辨识函数项的性质。

令 $\phi(\tau) = [G(y), -F(x)]$, 考察函数 $\phi(\tau)$ 的持续激励性质

$$\begin{aligned} \phi(\tau)\phi^T(\tau) &= [G(y), -F(x)][G(y), -F(x)]^T \\ &= [G^2(y) - F^2(x)] \end{aligned} \quad (6-25)$$

若某些函数项 G_i 与 F_i 有着相同的形式, 即 $G_i(\bullet) = F_i(\bullet)$; 当 $y(t) \rightarrow x(t)$ 时有 $[G_i^2(y, t) - F_i^2(x, t)] \rightarrow 0$, 此时激励水平参数 α_0 不存在, 即函数项 G_i 与 F_i 不再满足持续激励条件, 从而导致参数辨识失败。这从另一个角度解释了 6.2.2 节所举辨识例子失败的原因。

6.3.2 线性独立条件不满足的典型情况

一般而言,对于相关函数项 $F_i^T(x)$ 与 $G_i^T(y)$,如下情况可能导致其线性独立条件不满足:

- I. 函数组 $F_i^T(x)$ (或 $G_i^T(y)$) 收敛到 0,从而导致相应的未知参数 P_i (或 Q_i) 不能被辨识;
- II. 驱动变量(或响应变量)的某些状态达到内同步,即当 $t \rightarrow \infty$ 有 $x_i(t) \rightarrow x_{j(j \neq i)}(t)$ (或 $y_i(t) \rightarrow y_{j(j \neq i)}(t)$),此时可能会 $F_i^T(x(t)) \rightarrow 0$ (或 $G_i^T(y(t)) \rightarrow 0$);或 $F_i^T(x(t)) \rightarrow F_j^T(x(t))$ (或 $G_i^T(y(t)) \rightarrow G_j^T(y(t))$);
- III. 驱动变量与响应变量达到同步,比如当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y_j(t) \rightarrow x_i(t)$;此时可能存在 $F_i^T(x(t)) \rightarrow G_j^T(y(t))$,即相关函数项在同步流形 $y_j(t) \rightarrow x_i(t)$ 上不再线性独立,导致未知参数 P_i 和 Q_j 均不能被辨识。

当存在上述情况时,则会导致相应的未知参数不能辨识或者辨识到虚假值,此时需人为施加措施保证辨识函数的线性独立性,从而确保未知参数的正确辨识。

6.4 保证线性独立条件的措施

6.4.1 改变辨识函数项的结构

在自适应同步过程中,当预测到在同步流形 $x_i(t) \rightarrow x_j(t)$ (或 $y_j(t) \rightarrow x_i(t)$) 上有 $F_i^T(x(t)) \rightarrow 0$ 或 $F_i^T(x(t)) \rightarrow F_j^T(x(t))$ (或 $F_i^T(x(t)) \rightarrow G_j^T(y(t))$),此时可改变函数项的结构为 $\hat{F}_i^T(x(t))$,从而重新检验新函数 $\hat{F}_i^T(x(t))$ 的线性独立性质,并最终保证未知参数 P_i 能被正确辨识。我们用一组实例说明这种方法。

考虑如下微分方程组描述的动力系统

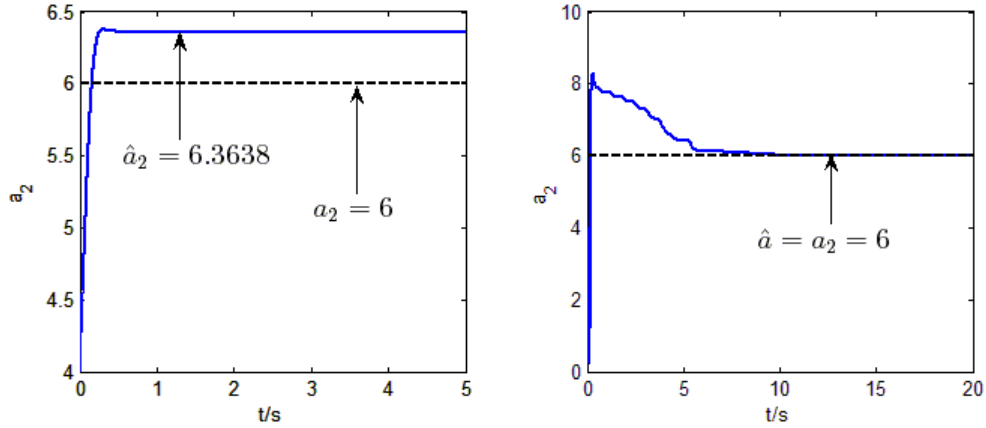
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_4 - x_1) \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4 = -(x_4 - x_1) + a_3(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (6-26)$$

上述系统是在文献[101]中作为参数辨识失败的例子所提出的。当系统参数选为 $a_1 = a_3 = 10$, $b = 8/3$, $c = 28$, $a_2 = 6$ 时,能观察到 $\dot{x}_4 - \dot{x}_1 = -(1 + a_2)(x_4 - x_1)$ 。因此在 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $x_4(t) \rightarrow x_1(t)$,即系统状态变量 x_4 与 x_1 之间的内同步导致辨识函数项 $F_1(x) = x_4 - x_1$ 趋于 0。因此,即使未知参数 a_1, a_3, b, c 能被辨识, a_2 将会辨识失败。

我们可改变函数项 $F_1(x)$ 的结构,例如更改为 $\hat{F}_1(x) = x_4 - x_1 + x_2$,此时未知参数 a_2 的辨识律修正为

$$\dot{\hat{a}}_2 = (y_4 - y_1 + y_2)e_1 \quad (6-27)$$

明显地，此时新的函数项 $\hat{F}_1(x)$ 满足了线性独立条件。我们重新做了一组仿真，结果如图 6-2 所示。从该图可看出，当改变辨识项的结构使其重新满足线性独立（或持续激励）条件时，未知的系统参数可以被辨识到真实值。



(a) 原有的辨识函数的辨识结果; (b) 改变辨识函数结构的辨识结果

图 6-2 函数项结构对参数辨识的影响

6.4.2 改变系统状态函数

有些情况下辨识函数项 $F^T(\bullet)$ （或 $G^T(\bullet)$ ）是固定且不能改变的，此时可通过在系统状态方程施加额外信号来重新保证相关函数项的线性独立条件。这个措施相当于给辨识函数增加额外的信息，从而有助于未知参数的辨识与收敛。假定函数项 $F_i(x)$ 收敛到稳态值或者与其他函数项在同步流形上线性依赖，我们可在状态变量 x_i （或其他状态）的演化方程中施加额外信号，即

$$\dot{x}_i = f_i(x) + F_i(x)P_i + \omega_i \quad (6-28)$$

我们仍以上小节例子为例说明。因 $F_1(x(t)) = x_4(t) - x_1(t) \rightarrow 0$ ，我们可在系统状态 x_1 或 x_4 的演化方程中施加信号 ω ，消除或者破坏 x_1 与 x_4 之间的内同步轨道

$$\dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_4 - x_1) + \omega_1 \quad (6-29)$$

或者

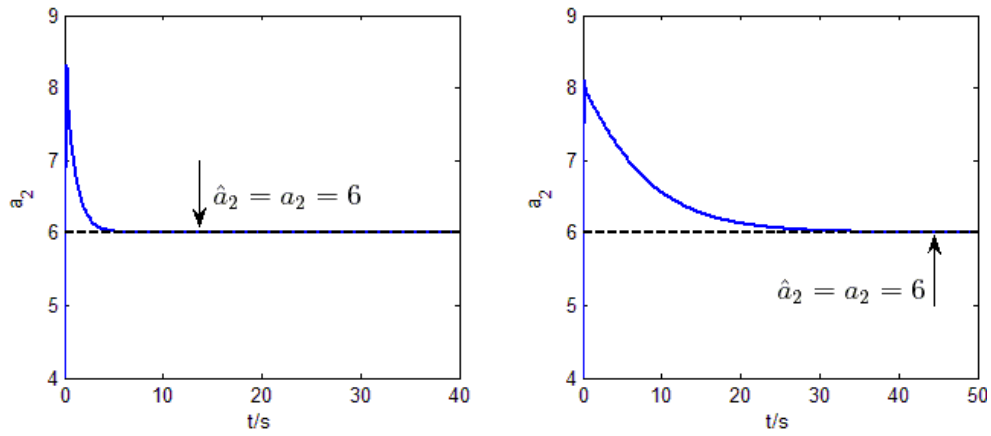
$$\dot{x}_4 = -(x_4 - x_1) + a_3(x_2 - x_1) + \omega_4 \quad (6-30)$$

在数值计算中，设 $\omega_1 = -x_3$ ， $\omega_4 = 15$ ，此时 $F_1(x(t))$ 的线性独立性将得到满足，未知参数 a_2 将会成功，从而使得辨识函数再次满足线性独立条件，原先不可辨识的未知参数 a_2 被成功辨识到真实值。数值计算结果（图 6-3）验证了这一点。

6.4.3 改变同步轨道

在驱动系统与响应系统中均有未知参数需要辨识时，可能会随着同步的发生，相应的辨识函数项不再满足线性独立条件（如 6.2.2 小节所述的例子）。此时的一个简单

的措施是变更同步轨道，使得原先线性依赖的函数项在新的同步流形上重新获得线性独立的性质。



(a) 采用式(6-29)状态函数的辨识结果; (b) 采用式(6-30)状态函数的辨识结果

图 6-3 改变系统状态函数的未知参数辨识结果(黑色虚线表示真实值)

以 Lorenz 系统为例，假设驱动系统与响应系统均是同结构的 Lorenz 系统（但其系统参数值不相同），分别描述如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = c_1x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - b_1x_3 \end{cases} \quad (6-31)$$

以及

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_2(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = c_2y_1 - y_2 - y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - b_2y_3 + u_3 \end{cases} \quad (6-32)$$

驱动系统参数真实值为 $a_1 = 10$, $c_1 = 28$, $b_1 = 8/3$, 响应系统参数真实值为 $a_2 = 9$, $c_2 = 27$, $b_2 = 8/3 + 0.2$ 。若定义同步轨道为 $y_1 \xrightarrow{sym} x_1$, $y_2 \xrightarrow{sym} x_2$, $y_3 \xrightarrow{sym} x_3$, 设计如下的参数辨识律

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_1 = -(x_2 - x_1)e_1 \\ \dot{\hat{b}}_1 = x_3e_3 \\ \dot{\hat{c}}_1 = -x_1e_2 \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} \dot{\hat{a}}_2 = (y_2 - y_1)e_1 \\ \dot{\hat{b}}_2 = -y_3e_3 \\ \dot{\hat{c}}_2 = y_1e_2 \end{cases} \quad (6-33)$$

事实上，在同步流形有 $y_1(t) = x_1(t)$, $y_3(t) = x_3(t)$ 及 $y_2(t) = x_2(t)$, 因辨识函数 $-(x_2 - x_1)$, x_3 , $-x_1$ 分别趋近于 $(y_2 - y_1)$, $-y_3$, y_1 , 所有函数项均不满足线性独立条件, 导致所有的参数 $a_1 \sim c_2$ 均辨识失败。

我们做了一组数值仿真来验证上述分析参数更新方程的参数估计初值为 $\hat{a}_1(0) = \hat{a}_2(0) = 3$, $\hat{b}_1(0) = \hat{b}_2(0) = -6$, $\hat{c}_1(0) = \hat{c}_2(0) = -2$. 驱动系统与响应系统状态变量

的初值分别设为 $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = [2, -5, -1]^T$, $[y_1(0), y_2(0), y_3(0)]^T = [-2, 5, 1]^T$ 。从图 6-4 可看出, 所有的未知参数 $a_1 \sim c_2$ 均没有辨识到真实值。

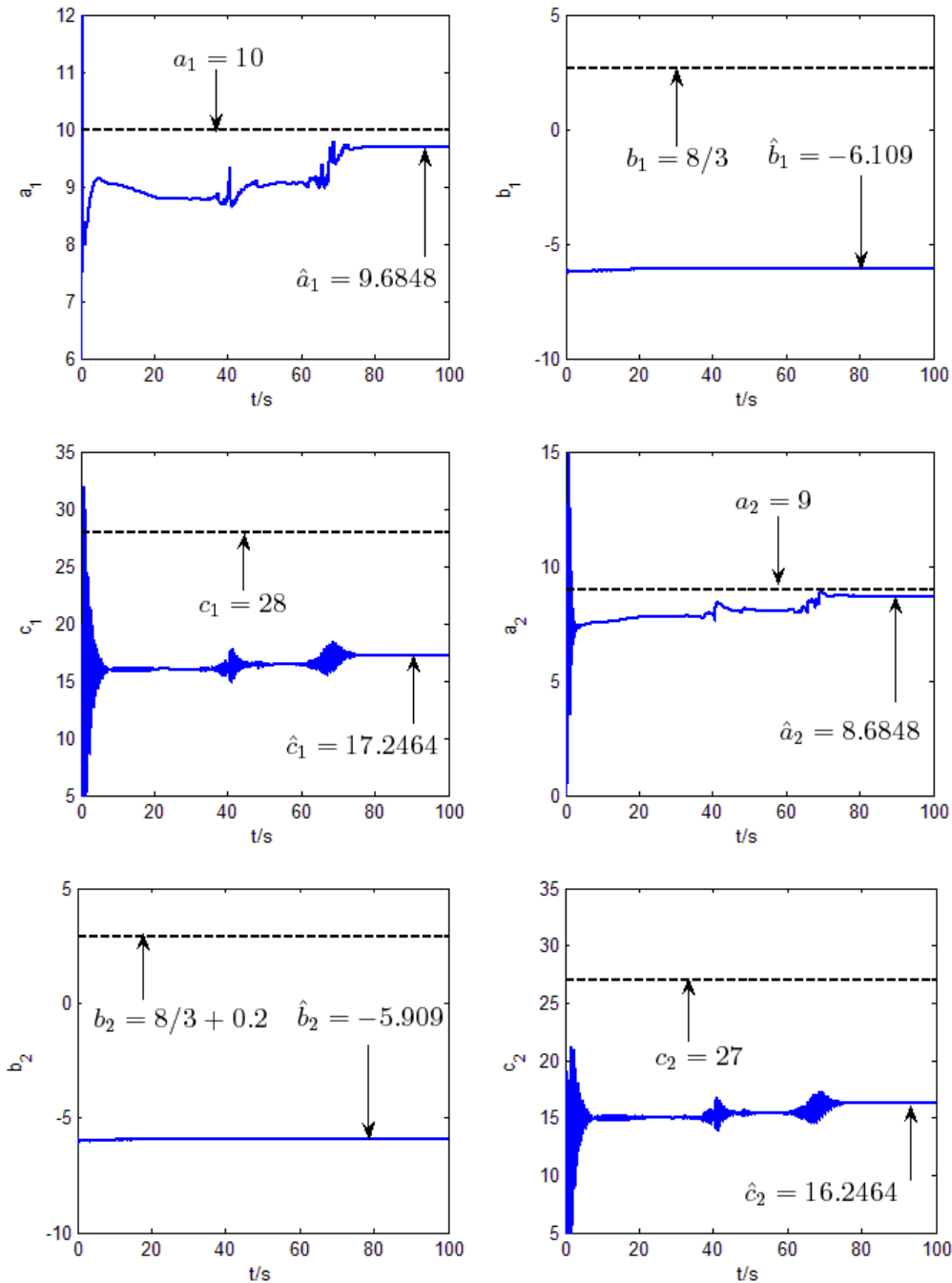


图 6-4 式(6-33)参数更新律的未知参数辨识结果(黑色虚线表示真实值)

通过观察各个辨识函数项, 若用响应系统状态 y_1 同步驱动状态 x_1 , 则函数项 x_1 与 $(y_2 - y_1)$ 在同步轨道 $y_1(t) \rightarrow x_2(t)$ 上是线性独立的, 从而未知参数 a_2 可以 c_1 被辨识出来; 进一步地, 若选择状态变量 y_3 与 x_1 之间相互同步, 则函数项 $-y_3$ 与 $(x_2 - x_1)$ 在同步轨道 $y_3(t) \rightarrow x_1(t)$ 亦是线性独立的, 从而未知参数 b_2 和 a_1 也能被成功辨识。对于剩下的两个状态变量 y_2 及 x_3 , 辨识函数项 y_1 与 $-x_3$ 在同步轨道上 $y_2(t) \rightarrow x_3(t)$ 也是相互独立的, 所

以剩余的两个参数 c_2 及 b_1 亦能成功辨识。因此，通过上述分析，定义同步误差

$$e_1 = y_1 - x_2, e_3 = y_3 - x_1, e_2 = y_2 - x_3 \quad (6-34)$$

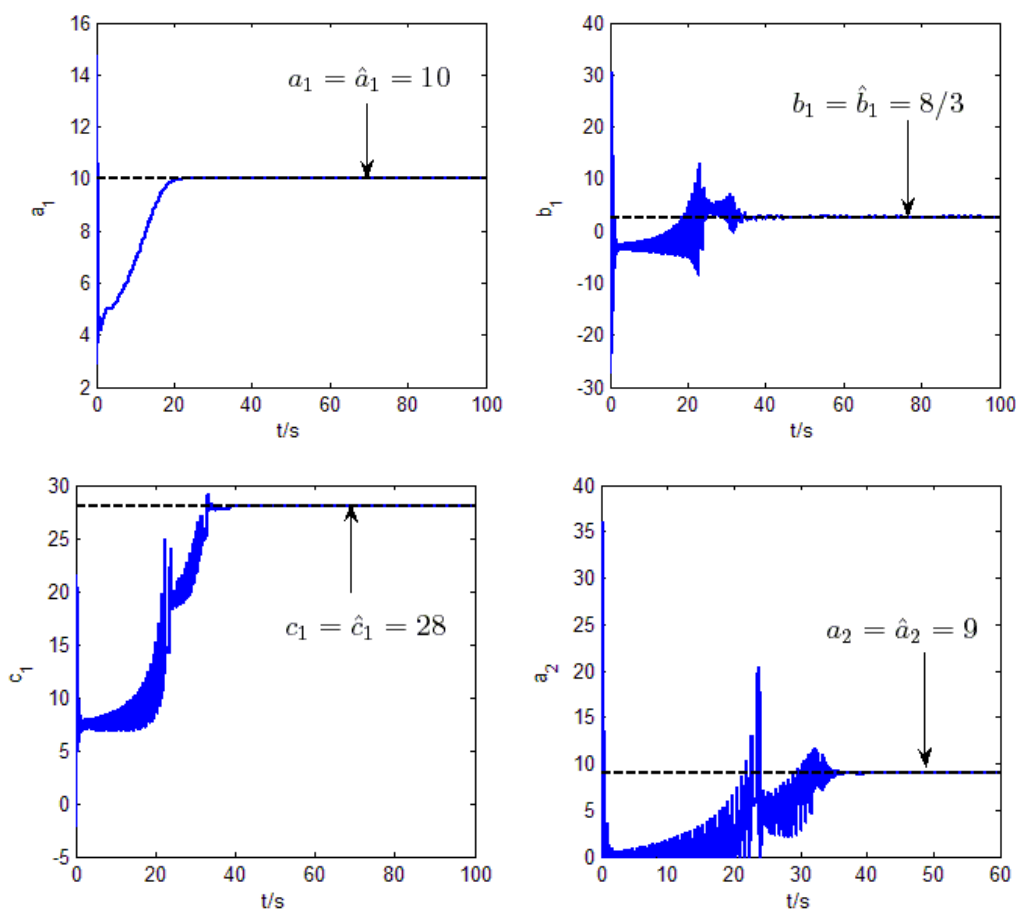
根据式(6-19)设计控制器

$$\begin{cases} u_1 = -(x_2 + x_1 x_3) + \hat{c}_1 x_1 - \hat{a}_2 (y_2 - y_1) - k_1 e_1 \\ u_2 = x_1 x_2 + y_2 + y_1 y_3 - \hat{b}_1 x_3 - \hat{c}_2 y_1 - k_2 e_2 \\ u_3 = -y_1 y_2 + \hat{a}_1 (x_2 - x_1) + \hat{b}_2 y_3 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (6-35)$$

以及参数更新律

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_1 = -(x_2 - x_1)e_3 \\ \dot{\hat{b}}_1 = x_3 e_2 \\ \dot{\hat{c}}_1 = -x_1 e_1 \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} \dot{\hat{a}}_2 = (y_2 - y_1)e_1 \\ \dot{\hat{b}}_2 = -y_3 e_3 \\ \dot{\hat{c}}_2 = y_1 e_2 \end{cases} \quad (6-36)$$

在数值计算中，选取控制增益 $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3) = \text{diag}(2, 2, 2)$ ，其余的初值设置与上文相同。从计算得到的图形（图 6-5）中可看到，通过变更同步轨道，所有的未知参数都能被辨识出来。



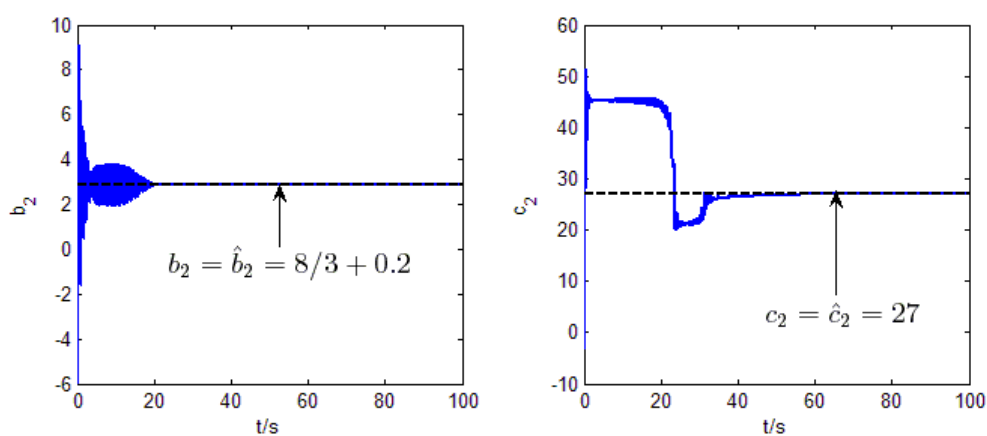


图 6-5 变更同步轨道后的参数辨识结果

6.5 本章小结

在本章中，我们回顾了基于自适应同步的设计方法，对现有文献中的部分结果进行了修正。我们重申了辨识函数的线性独立条件在未知参数辨识过程中的重要性，分析了线性独立条件与持续激励条件之间的关系，以及这个重要条件不满足时的一些典型情况。最后给出了保证线性独立条件满足的一些可行措施，通过几个典型的应用实例和数值计算验证了分析与措施的有效性。

7 结论和展望

7.1 全文总结

本文对动力系统及复杂网路的同步控制以及参数辨识的几个问题进行了研究，主要结果如下。

(1). 研究了同结构与异结构的两个动力系统之间的 MFPS 同步问题，并将同步方案推广到两个系统维数不一致的情形中，实现了系统的全状态的同步；当辨识函数满足线性独立条件时，则驱动系统与响应系统中的未知参数均能被全部辨识出来。这一部分的结果推广了部分文献中的已有结果。

(2). 针对最近引起研究者兴趣的不同阶次混沌系统的同步问题，我们给出了一种通用的同步控制器设计方法。基于分数阶微积分的运算性质，设计子控制器将该问题转化为同阶次的整数阶或分数阶系统的同步问题；根据整数阶或分数阶线性系统的稳定性理论，设计非线性控制器使得同步误差系统达到稳定，从而实现不同阶次的系统之间的同步。这部分结果包含两部分内容：整数阶与分数阶混沌系统的同步，以及不同阶次且结构不同的分数阶动力系统的投影同步。另外，我们还回顾了关于这个话题的现有方法并做了评论。

(3). 针对最近兴起的分数阶复杂网络的研究，我们提出了一种基于自适应同步的分数阶复杂网络的辨识方法，从而推广了当前文献中关于复杂网络辨识的现有结果。另外，我们还讨论了影响网络成功辨识的因素，发现过大的耦合强度以及过小的分数阶阶次均不利于不确定分数阶网络的拓扑辨识。

(4). 在第 6 章中，我们讨论了当动力系统或者复杂网络含未知参数时的自适应同步设计问题。首先我们修正了部分文献中给出的含有缺陷的结果，并且重申了辨识函数的线性独立条件的重要性。我们分析了线性独立条件不满足时的几种典型情况，同时给出了保证辨识函数重新满足线性独立性质的措施，并辅以相应的例子加以说明。

7.2 未来研究展望

在研究过程中，作者认为后续的研究工作包括以下几个方面的内容。

(1). 本文的研究属于理论层面的研究，一些实际的情况并未考虑进来。比如，在实际场合中，动力系统存在状态时滞或扰动、复杂网络存在节点或耦合时滞、系统建模存在不确定性等，如何针对这些实际情况设计可行或者鲁棒的控制器和参数辨识律，也是有着重要研究意义的课题。

(2). 复杂网络的同步与多智能体一致性 (consensus of multi-agent systems) 可在一个更广的框架上进行研究^[102]。多智能体一致性的研究因其鲜明的应用领域，在最近几

年来引起了很多研究者的兴趣和注意，已经成为控制学科的一个研究热点^[14-15]。未来的研究也将扩展至这个领域中。

参考文献

- [1] Czolczynski K, Perlikowski P, Stefanski A, et al. Clustering and synchronization of n Huygens' clocks[J]. *Physica A*, 2009, 388 (24): 5013-5023.
- [2] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [3] Néda Z, Ravasz E, Brechet Y, et al. Self-organizing processes: The sound of many hands clapping[J]. *Nature*, 2000, 403 (6772): 849-850.
- [4] Blasius B, Huppert A, Stone L. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems[J]. *Nature*, 1999, 399 (6734): 354-359.
- [5] Mohanty P. Nano-oscillators get it together[J]. *Nature*, 2005, 436 (7048): 325-326.
- [6] Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology[J]. *Nature*, 2001, 410 (6825): 277-284.
- [7] Prokhorov M, Ponomarenko V, Gridnev V, et al. Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system[J]. *Physical Review E*, 2003, 68 (4): 041913.
- [8] Danino T, Mondragón-Palomino O, Tsimring L, et al. A synchronized quorum of genetic clocks[J]. *Nature*, 2010, 463 (7279): 326-330.
- [9] Kopetz H. Real-time systems: design principles for distributed embedded applications[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 2011.
- [10] Wen B, Fan J, Zhao C, et al. Vibratory Synchronization and Controlled Synchronization in Engineering[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [11] Filatrella G, Nielsen AH, Pedersen NF. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model[J]. *The European Physical Journal B*, 2008, 61 (4): 485-491.
- [12] Rosenblum M, Pikovsky A. Delayed feedback control of collective synchrony: An approach to suppression of pathological brain rhythms[J]. *Physical Review E*, 2004, 70 (4): 41904.
- [13] Strogatz SH, Abrams DM, McRobie A, et al. Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge[J]. *Nature*, 2005, 438 (7064): 43-44.
- [14] Olfati-Saber R, Fax JA, Murray RM. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95 (1): 215-233.
- [15] Ren W, Cao Y. Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues[M]. Berlin: Springer Verlag, 2011.
- [16] Arenas A, Diaz-Guilera A, Pérez-Vicente CJ. Synchronization reveals topological scales in complex networks[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96 (11): 114102.
- [17] Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64 (8): 821-824.
- [18] Liu F, Ren Y, Shan X, et al. A linear feedback synchronization theorem for a class of chaotic systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 13 (4): 723-730.
- [19] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, et al. The synchronization of chaotic systems[J]. *Physics Reports*, 2002, 366 (1-2): 1-101.
- [20] Abarbanel HDI, Rulkov NF, Sushchik MM. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach[J]. *Physical Review E*, 1996, 53 (5): 4528.
- [21] Jovic B. Synchronization Techniques for Chaotic Communication Systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [22] 王兴元. 混沌系统的同步及在保密通信中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [23] 陈文, 孙洪广, 李西成 等. 力学与工程问题的分数阶导数建模 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [24] Magin RL. Fractional calculus in bioengineering[M]. Redding: Begell House, 2006.
- [25] Sabatier J, Agrawal OP, Machado J. Advances in fractional calculus: Theoretical developments and applications in physics and engineering[M]. Berlin: Springer Publishing Company, 2007.
- [26] Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[C]. Lille, France: Proceeding of IMACS, IEEE-SMC, 1996: 963-968.
- [27] Podlubny I. Fractional-order systems and PI λ D μ -controllers[J]. *Automatic Control, IEEE*

- Transactions on, 1999, 44 (1): 208-214.
- [28] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24 (2): 161-169.
- [29] 汪纪锋. 分数阶系统控制性能分析[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010
- [30] Hartley TT, Lorenzo CF, Killory Qammer H. Chaos in a fractional order Chua's system[J]. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 1995, 42 (8): 485-490.
- [31] Grigorenko I, Grigorenko E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system[J]. Physical Review Letters, 2003, 91 (3): 34101.
- [32] Petráš I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation[M]. Berlin: Springer Verlag, 2011.
- [33] 高心. 分数阶动力学系统的混沌、控制与同步[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 2010.
- [34] Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393 (6684): 440-442.
- [35] Barabási AL, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. science, 1999, 286 (5439): 509-512.
- [36] Wang X, Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12 (1): 187-192.
- [37] Zhou C, Kurths J. Dynamical weights and enhanced synchronization in adaptive complex networks[J]. Physical Review Letters, 2006, 96 (16): 164102.
- [38] Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, et al. Synchronization in complex networks[J]. Physics Reports, 2008, 469 (3): 93-153.
- [39] Tang Y, Wang Z, Fang J. Pinning control of fractional-order weighted complex networks[J]. Chaos, 2009, 19: 1.
- [40] Wang J, Zhang Y. Network synchronization in a population of star-coupled fractional nonlinear oscillators[J]. Physics Letters A, 2010, 374 (13-14): 1464-1468.
- [41] Parlitz U. Estimating model parameters from time series by autosynchronization[J]. Physical Review Letters, 1996, 76 (8): 1232-1235.
- [42] Li L, Peng H, Wang X, et al. Comment on two papers of chaotic synchronization[J]. Physics Letters A, 2004, 333 (3): 269-270.
- [43] Yu D, Wu A. Comment on "Estimating model parameters from time series by autosynchronization"[J]. Physical Review Letters, 2005, 94 (21): 219401.
- [44] Huang D. Adaptive-feedback control algorithm[J]. Physical Review E, 2006, 73 (6): 066204.
- [45] Lin W, Ma HF. Failure of parameter identification based on adaptive synchronization techniques[J]. Physical Review E, 2007, 75 (6): 066212.
- [46] Loria A, Panteley E, Zavala-Río A. Adaptive observers with persistency of excitation for synchronization of chaotic systems[J]. Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on, 2009, 56 (12): 2703-2716.
- [47] Yu D, Righero M, Kocarev L. Estimating topology of networks[J]. Physical Review Letters, 2006, 97 (18): 188701.
- [48] Wu X. Synchronization-based topology identification of weighted general complex dynamical networks with time-varying coupling delay[J]. Physica A, 2008, 387 (4): 997-1008.
- [49] Liu H, Lu JA, Lü J, et al. Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay[J]. Automatica, 2009, 45 (8): 1799-1807.
- [50] 陆君安, 吕金虎, 刘慧, 等. 复杂动力网络结构识别的某些新进展[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2010, 7 (002): 63-69.
- [51] Lü J, Zhou T, Zhang S. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2002, 14 (4): 529-541.
- [52] Agiza H, Yassen M. Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control[J]. Physics Letters A, 2001, 278 (4): 191-197.
- [53] Stefanovska A, Haken H, McClintock PVE, et al. Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system[J]. Physical Review Letters, 2000, 85 (22): 4831-4834.
- [54] Du H, Zeng Q, Wang C. Modified function projective synchronization of chaotic system[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 42 (4): 2399-2404.
- [55] Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1999, 82 (15): 3042-3045.
- [56] Kim CM, Rim S, Kye WH, et al. Anti-synchronization of chaotic oscillators[J]. Physics Letters A,

- 2003, 320 (1): 39-46.
- [57] Ioannou PA, Sun J. Robust adaptive control[M]. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [58] Slotine JJE, Li W. Applied nonlinear control[M]. New Jersey: Prantice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [59] Peng H, Li L, Yang Y, et al. Conditions of parameter identification from time series[J]. Physical Review E, 2011, 83 (3): 036202.
- [60] Femat R, Solís-Perales G. Synchronization of chaotic systems with different order[J]. Physical Review E, 2002, 65 (3): 036226.
- [61] Hu M, Xu Z, Zhang R, et al. Adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic systems with the same and different order[J]. Physics Letters A, 2007, 365 (4): 315-327.
- [62] Al-Sawalha MM, Noorani M. Adaptive anti-synchronization of two identical and different hyperchaotic systems with uncertain parameters[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15 (4): 1036-1047.
- [63] Sprott J. Some simple chaotic flows[J]. Physical Review E, 1994, 50 (2): 647-650.
- [64] Jia Q. Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control[J]. Physics Letters A, 2007, 366 (3): 217-222.
- [65] Dong G, Bi Q. Adaptive modified function projective synchronization of hyperchaotic systems with unknown parameters[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15 (11): 3547-3556.
- [66] Tavazoei MS, Haeri M. Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller[J]. Physica A, 2008, 387 (1): 57-70.
- [67] Zhou P, Cao Y. Function projective synchronization between fractional-order chaotic systems and integer-order chaotic systems[J]. Chinese Physics B, 2010, 19: 100507.
- [68] Odibat ZM. Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 60 (4): 479-487.
- [69] Diethelm K. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type[M]. Berlin: Springer Verlag, 2010.
- [70] Deng W, Li C. Chaos synchronization of the fractional Lü system[J]. Physica A, 2005, 353: 61-72.
- [71] Li C, Deng W, Xu D. Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order[J]. Physica A, 2006, 360 (2): 171-185.
- [72] Odibat Z, Corson N, Aziz-Alaoui M, et al. Synchronization of chaotic fractional-order systems via linear control[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20 (1): 1-15.
- [73] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V. Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15 (11): 3536-3546.
- [74] Chen L, Chai Y, Wu R. Lag projective synchronization in fractional-order chaotic (hyperchaotic) systems[J]. Physics Letters A, 2011, 375 (21): 2099-2110.
- [75] Zhou P, Ding R. Chaotic synchronization between different fractional-order chaotic systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348 (10): 2839-2848.
- [76] Si G, Sun Z, Zhang Y, et al. Projective synchronization of different fractional-order chaotic systems with non-identical orders[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13 (4): 1761-1771.
- [77] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic press, 1999.
- [78] Deng W, Li C, Lü J. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays[J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 48 (4): 409-416.
- [79] Vincent U. Synchronization of identical and non-identical 4-D chaotic systems using active control[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 37 (4): 1065-1075.
- [80] Pan L, Zhou W, Zhou L, et al. Chaos synchronization between two different fractional-order hyperchaotic systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16 (6): 2628-2640.
- [81] Jia LX, Dai H, Hui M. Nonlinear feedback synchronisation control between fractional-order and integer-order chaotic systems[J]. Chinese Physics B, 2010, 19: 110509.
- [82] Asheghan MM, Míguez J, Hamidi-Beheshti MT, et al. Robust outer synchronization between two complex networks with fractional order dynamics[J]. Chaos, 2011, 21 (3): 033121.
- [83] Wu X, Lai D, Lu H. Generalized synchronization of the fractional-order chaos in weighted complex

- dynamical networks with nonidentical nodes[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012: DOI: 10.1007/s11071-11011-10295-11079.
- [84] 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 基于 Lyapunov 方程的分数阶混沌系统同步[J]. *物理学报*, 2008, 57 (12): 7522-7526.
- [85] 秦昌茂, 齐乃明, 朱凯. 分数阶系统变阶次状态空间建模及稳定理论[J]. *控制与决策*, 2011, 26 (11): 1757-1760.
- [86] Zhou J, Lu J. Topology identification of weighted complex dynamical networks[J]. *Physica A*, 2007, 386 (1): 481-491.
- [87] Zhao J, Li Q, Lu JA, et al. Topology identification of complex dynamical networks[J]. *Chaos*, 2010, 20 (2): 023119-023117.
- [88] Chen L, Lu J, Tse CK. Synchronization: an obstacle to identification of network topology[J]. *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, 2009, 56 (4): 310-314.
- [89] Tavazoei MS, Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems[J]. *Physica D*, 2008, 237 (20): 2628-2637.
- [90] Cao J, Lu J. Adaptive synchronization of neural networks with or without time-varying delay[J]. *Chaos*, 2006, 16 (1): 013133.
- [91] Dedieu H, Ogorzalek M. Identifiability and identification of chaotic systems based on adaptive synchronization[J]. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 1997, 44 (10): 948-962.
- [92] Liu Y. Adaptive observer design and its impacts on chaos-synchronization-based secure communications[D]. Hong Kong: City University of Hong Kong, 2009.
- [93] Yu Y, Li HX. Adaptive generalized function projective synchronization of uncertain chaotic systems[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11 (4): 2456-2464.
- [94] Li Z, Zhao X. Generalized function projective synchronization of two different hyperchaotic systems with unknown parameters[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, 12 (5): 2607-2615.
- [95] Wu X, Lu H. Adaptive generalized function projective lag synchronization of different chaotic systems with fully uncertain parameters[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2011, 44 (10): 802-810.
- [96] Xu Y, Zhou W, Fang Ja, et al. Topology identification and adaptive synchronization of uncertain complex networks with adaptive double scaling functions[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16 (8): 3337-3343.
- [97] Wang X, Sun P. Multi-switching synchronization of chaotic system with adaptive controllers and unknown parameters[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 63 (4): 599-609.
- [98] Mossa Al-sawalha M, Noorani MSM. Chaos reduced-order anti-synchronization of chaotic systems with fully unknown parameters[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17 (4): 1908-1920.
- [99] Wang ZL, Shi XR. Adaptive Q-S synchronization of non-identical chaotic systems with unknown parameters[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59 (4): 559-567.
- [100] Besançon G. Remarks on nonlinear adaptive observer design[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 41 (4): 271-280.
- [101] Yu W, Chen G, Cao J, et al. Parameter identification of dynamical systems from time series[J]. *Physical Review E*, 2007, 75 (6): 067201.
- [102] Li Z, Duan Z, Chen G, et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint[J]. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 2010, 57 (1): 213-224.

致 谢

三年的硕士学习将要结束，这篇学位论文的完成也标志着我的这段求学生涯将要划上句号。在此，我要感谢许多给予我帮助、鼓励和支持的人。

首先感谢司刚全老师，三年来不管是从科研还是生活上都给了我很多鼓励和帮助。在我的研究遇到困境和瓶颈以致停滞不前时，司老师总是能及时给予鼓励，使我消除焦灼不安的情绪；很多次的讨论都能让我更清晰看到研究的方向，使我能一直坚持着所选的研究道路。司老师行事十分认真，那种严谨专注的态度也让我受益很多，让我一直督促自己尽心做好每一件事。还要感谢教研室的其他老师，为人亲切、治学严谨的贾立新老师、张彦斌老师以及曹晖老师，在我研究生时期也给予了我很多的指导，同时也为我营造了一个相对宽松的科研环境，使我能够按照研究兴趣自主选择研究课题。

我要谢谢我的家人，亲爱的爸妈以及可爱的弟弟和小妹，你们无微不至的爱与关怀始终是我最大的动力，我的家庭让我养成了乐观向上且勤勉努力的性格；因此每次我在学业或研究中能取得一些成绩，我首先都会跟你们分享。

还要感谢同一个教研室的李霁、葛玥、郑伊飞、陈文权、张欢、李文学、杨东亮、张红英、娄勇等同学和师弟师妹们，以及我的室友惠培智、张守志和单诗阳等，还有硕 921 班的其他同学们，你们与我一起度过这愉悦而难忘的三年时光。另外，特别感谢小谭，在这数月时间以来对我的督促和鼓励。

最后感谢这么多年求学生涯中所认识的那么多优秀的人，与你们为伴，让我一直在反观自身，一直在勉励自己做到最好。

攻读学位期间取得的研究成果

- [1] **Zhiyong Sun**, Gangquan Si, Fuhong Min, Yanbin Zhang. Adaptive modified function projective synchronization and parameter identification of uncertain hyperchaotic (chaotic) systems with identical or non-identical structures[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 68(4):471-486 (SCI 和 EI 收录);
- [2] Gangquan Si, **Zhiyong Sun***, Yanbin Zhang. A general method for synchronizing an integer-order chaotic system and a fractional-order chaotic system[J]. *Chinese Physics B*, 2011, 20(8): 080505 (通讯作者, SCI 和 EI 收录);
- [3] **Zhiyong Sun**, Gangquan Si. Identifying system parameters and network structures in uncertain fractional order complex networks[C]. Presented in the 7th Chinese Conference on Complex Network (CCCN), Chengdu, China, Oct. 21-24, 2011;
- [4] **Zhiyong Sun**, Gangquan Si. Comment on: Topology identification and adaptive synchronization of uncertain complex networks with adaptive double scaling functions [Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 16 (2011) 3337-3343][J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(8): 3461-3463 (SCI 和 EI 收录);
- [5] Gangquan Si, **Zhiyong Sun***, Yanbin Zhang, Wenquan Chen. Projective synchronization of different fractional-order chaotic systems with non-identical orders[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13 (4): 1761-1771(通讯作者, SCI 和 EI 收录);
- [6] Gangquan Si, **Zhiyong Sun***, Hongying Zhang, Yanbin Zhang. Parameter estimation and topology identification of uncertain fractional order complex networks[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.05.005, accepted for publication (通讯作者, SCI 和 EI 收录);

在审部分:

- [7] **Zhiyong Sun**, Gangquan Si. Comment on two papers on generalized function projective synchronization of uncertain dynamical systems[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, under review;
- [8] **Zhiyong Sun**, Gangquan Si. Comment on "Adaptive generalized function projective lag synchronization of different chaotic systems with fully uncertain parameters"[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, under review;
- [9] **Zhiyong Sun**, Gangquan Si, Yue Ge, Yanbin Zhang. Adaptive synchronization design for nonlinear dynamical systems in the presence of unknown system parameters: a revisit[J]. To be submitted to *Nonlinear Dynamics*.

